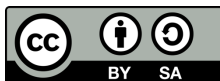
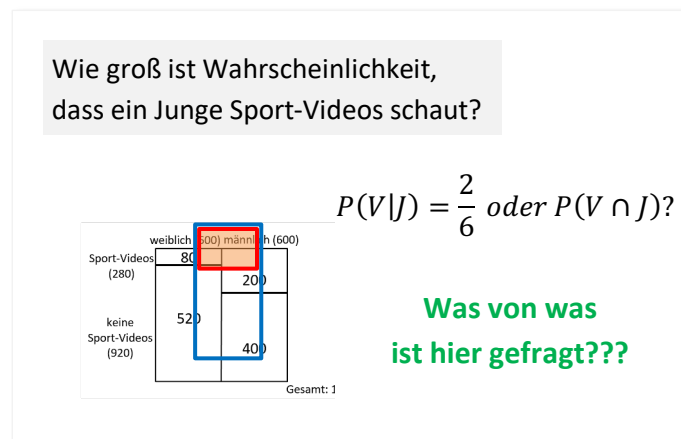




Bedingte Wahrscheinlichkeiten –

Baustein B: Wahrscheinlichkeiten verstehen und bestimmen



Dieses Material wurde durch Monika Post und Susanne Prediger konzipiert und kann unter der Creative Commons Lizenz BY-SA: Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International weiterverwendet werden.

Zitierbar als

Post, Monika & Prediger, Susanne (2024). Bedingte Wahrscheinlichkeiten – Baustein B: Wahrscheinlichkeiten verstehen und bestimmen. Sprach- und fachintegriertes Unterrichtsmaterial. Open Educational Resources unter sima.dzlm.de/um/9-002

Projektherkunft

Dieses fach- und sprachintegrierte Fördermaterial ist entstanden im Rahmen des Projekts SiMa – Sprachbildung im Mathematikunterricht unter Projektleitung von Susanne Prediger.

Bildrechte

Alle Grafiken sind selbst erstellt von den Autorinnen und auch in Lizenz BY-SA zu nutzen.



B Wahrscheinlichkeiten verstehen und bestimmen

1 Wie wahrscheinlich ist eigentlich, dass...?



a) Schauen Sie das Video „Big Data in 3 Minuten erklärt“ von youknow (<https://you-know.de>) unter https://youtu.be/uH813u7_b0s (00:00-01:32) an.



b) Betrachten Sie das folgende Zitat aus dem Video:
„Mithilfe dieser Daten wird errechnet, welche Produkte den Käufer mit hoher Wahrscheinlichkeit noch interessieren könnten.“ (01:25)

Erklären Sie am Beispiel in eigenen Worten:

- Was ist eine Wahrscheinlichkeit?
Wie hängen Wahrscheinlichkeiten und Anteilen zusammen?
- Welche Kaufempfehlung würden Sie einem neuen Kunden schicken?
Ändert sich diese, wenn der neue Kunde ein Hemd bestellt hat?

Wie hängen Wahrscheinlichkeiten mit Daten zusammen?

Daten beschreiben Anteile in **Gruppen**, zu denen man Merkmale schon erhoben hat. Mit Wahrscheinlichkeiten sagt man Merkmale **einer neuen Person** voraus. Aus Anteilen in bestehenden Daten macht man eine neue Voraussage, also Wahrscheinlichkeit als Prognosewert aus alten Daten.

c) Ein Online-Shop analysiert Daten zum Kauf von Hemden und Taschen von 1.000.000 Käufer/innen.

	Hemd (400.000)	kein Hemd (600.000)	
Tasche (470.000)	320.000	150.000	
keine Tasche (530.000)	80.000	450.000	
			Gesamt: 1.000.000

Eine zufällige neue Person bestellt im Online-Shop

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person ein Hemd kauft?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person ein Hemd und eine Tasche kauft?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der ein Hemd kauft, auch eine Tasche kauft?



Welche der drei Wahrscheinlichkeiten ist am größten und welche ist am kleinsten? Ordnen Sie **ohne zu rechnen** und begründen Sie am Anteilsbild.



2

Anteilstypen in Aussagen zu Wahrscheinlichkeiten erkennen

Den Aussagen zu Wahrscheinlichkeiten aus Aufgabe 1 c) kann jeweils eine der drei typischen Anteilsaussagen aus **Speicherbox A** (aus Baustein A) zugeordnet werden.



- a) • Formulieren Sie zu jeder Wahrscheinlichkeit eine passende Aussage zum Anteil. Markieren Sie in der **Wahrscheinlichkeit, Aussage zum Anteil und im Anteilsbild**: Was ist das **Ganze**? Was ist der **Teil**? Was ist die **Teil-Ganzes-Beziehung/Anteil**?
- Ordnen Sie den passenden Anteilstyp aus **Speicherbox A** jeweils zu. Begründen Sie.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person ein Hemd kauft?

Aussage zum Anteil:

	Hemd (400.000)	kein Hemd (600.000)	
Tasche (470.000)	320.000	150.000	Gesamt: 1.000.000
keine Tasche (530.000)	80.000	450.000	

Anteilstyp mit Begründung:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person ein Hemd und eine Tasche kauft?

Aussage zum Anteil:

	Hemd (400.000)	kein Hemd (600.000)	
Tasche (470.000)	320.000	150.000	Gesamt: 1.000.000
keine Tasche (530.000)	80.000	450.000	

Anteilstyp mit Begründung:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der ein Hemd kauft, auch eine Tasche bestellt?

Aussage zum Anteil:

	Hemd (400.000)	kein Hemd (600.000)	
Tasche (470.000)	320.000	150.000	Gesamt: 1.000.000
keine Tasche (530.000)	80.000	450.000	

Anteilstyp mit Begründung:



2 b) Sina findet weitere Formulierungen.



- Helfen Sie Sina, den richtigen Anteilstyp (kombinierte Aussage, Teil-vom-Teil-Aussage) zuzuordnen. Erklären und markieren Sie jeweils, woran Sie die den Anteilstyp erkennen.
- Finden Sie weitere Formulierungen in ihrem Mathebuch? Notieren Sie diese.

! Was ist das Ganze?
Was ist der Teil?
Was ist der Anteil?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde eine Tasche kauft, wenn er bereits ein Hemd gekauft hat?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde ein Hemd aber keine Tasche kauft?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand ein Hemd kauft, unter der Bedingung, dass er oder sie eine Tasche gekauft hat?

Paul kauf kein Hemd. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kauft er eine Tasche?

[Redacted text]

[Redacted text]

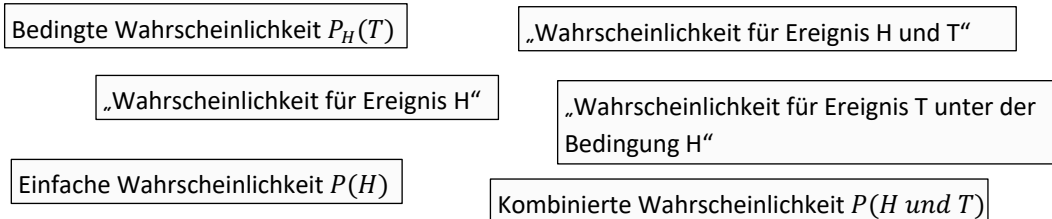


3 Wie berechne ich Wahrscheinlichkeiten?



- a) Lara hat in ihrem Mathebuch Bezeichnungen und Formeln für einfache, kombinierte und bedingte Wahrscheinlichkeiten gefunden, um Aussagen und Rechnungen genauer beschreiben zu können.

Einfache Aussage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person ein Hemd kauft?	Kombinierte Aussage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person ein Hemd und eine Tasche kauft?	Teil-vom-Teil-Aussage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der ein Hemd kauft, auch eine Tasche bestellt?
--	---	--



- Helfen Sie Lara, die Begriffe und Notationen den drei Wahrscheinlichkeiten aus Aufgabe **1b**) richtig zuzuordnen. (Hinweis: Die Merkmale Kauf von Hemd und Tasche werden in mathematischen Formeln mit Großbuchstaben wie H und T abgekürzt. Kein Hemd und keine Tasche mit \bar{H} bzw. \bar{T} .)
- Erklären Sie Ihre Zuordnung. Erklären Sie insbesondere, was „Ereignis“ und „bedingte“ bzw. „Bedingung“ bedeuten.



- b) Cem rechnet wie folgt. Vervollständigen Sie seine Rechnung. Überlegen Sie zu zweit, warum die Rechnung zur bedingten bzw. kombinierten Wahrscheinlichkeit passt.

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_{\text{Hemd}}(\text{Tasche}) = \frac{\text{Anzahl der Teilgruppe mit erstem und zweitem Merkmal}}{\text{Anzahl der ganzen Gruppe mit erstem Merkmal}} = \text{---} =$$

Kombinierte Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Hemd und Tasche}) = \frac{\text{Anzahl der Teilgruppe mit zwei Merkmalen}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}} = \text{---} =$$



4

Übung: Wahrscheinlichkeiten berechnen

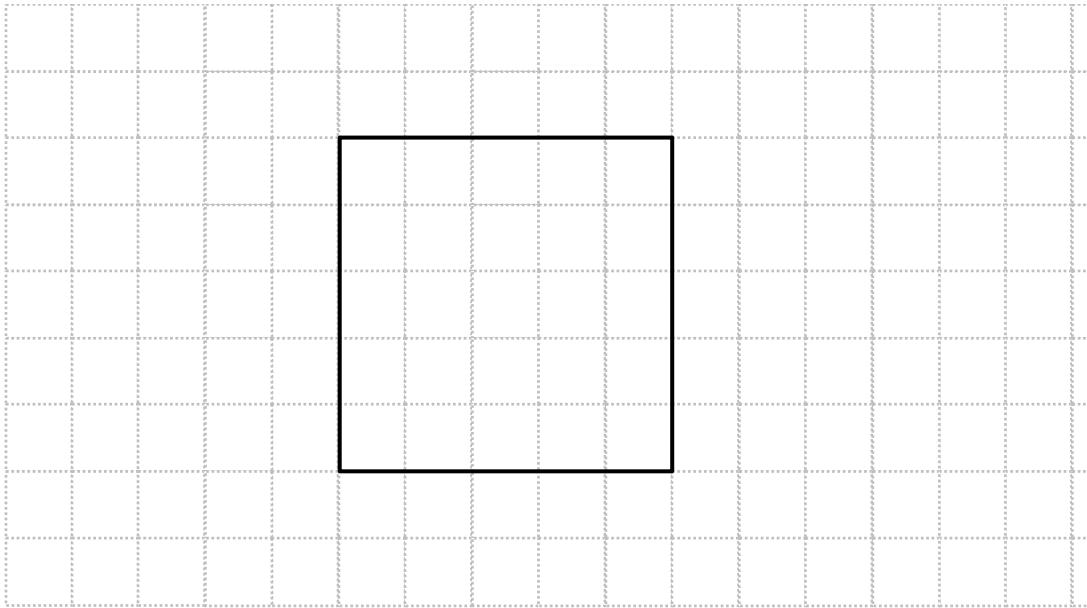


Eine Umfrage unter 150.000 Jugendlichen zum Spielen digitaler Spiele hat ergeben:

Insgesamt wurden 90.000 Jungen befragt. 30 % aller Jungen geben an, keine digitalen Spiele zu spielen. Bei $\frac{2}{5}$ der Mädchen wurde erfasst, dass sie digitale Spiele spielen.

(Werte in Anlehnung an JIM-Studie 2018)

a) Zeichnen Sie zu dem Datensatz ein Anteilsbild.



b) Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten wie in Aufgabe 13b).

Erklären Sie, welcher Anteil gemeint ist.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die keine digitalen Spiele spielt, weiblich ist?

$$P =$$

- Ein Unternehmen verteilt Werbeflyer für ein neues Spiel und händigt Jonas einen Flyer aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit spielt er digitale Spiele?

$$P =$$



5 Übung: Wahrscheinlichkeiten verstehen und formulieren



a) Anteile drücken eine Aussage über viele, Wahrscheinlichkeiten eine Prognose für eine Person auf Grundlage dieser Daten aus.

Der Anteil der ... an ... beträgt ...

Die Wahrscheinlichkeit, dass ... beträgt ...

	Hemd (400.000)	kein Hemd (600.000)	
Tasche (470.000)	320.000	150.000	Gesamt: 1.000.000
keine Tasche (530.000)	80.000	450.000	

Arbeiten Sie zu zweit:

- Die erste Person formuliert eine Aussage zum Anteil. Die zweite Person übersetzt in eine Wahrscheinlichkeit. Tauschen Sie anschließend die Rollen. Formulieren Sie Aussagen zu **verschiedenen** Wahrscheinlichkeitstypen (einfache, kombinierte, bedingte Wahrscheinlichkeit)!
- Erklären Sie jeweils: Um welchen Wahrscheinlichkeitstyp handelt es sich?

b) Julia und Sina sagen Folgendes zu der Aussage:

„Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Hemdkäufer eine Tasche kauft?“

	Hemd (400.000)	kein Hemd (600.000)	
Tasche (470.000)	320.000	150.000	Gesamt: 1.000.000
keine Tasche (530.000)	80.000	450.000	

Der Bruch ist $32/100$. Ich habe mir die wichtigen Sachen in der Frage markiert, also *Hemdkäufer* und *eine Tasche kauft*. Und es sind 320.000 Leute, die ein Hemd und eine Tasche kaufen und die 1.000.000 sind alle.

Julia

Sina

Die „Wahrscheinlichkeit, dass eine Person kein Hemd und keine Tasche kauft“ wäre viel größer als die Aussage hier. Weil der Kasten, wo kein Hemd und keine Tasche drin sind, ist viel größer als der oben links.

Haben Julia und Sina Recht? Begründen Sie kurz.



5 c) Passt der Anteil zur Wahrscheinlichkeit? Wenn nicht, erklären Sie und korrigieren Sie.



Wahrscheinlichkeit, dass eine Person keine Tasche kauft, wenn sie bereits ein Hemd gekauft hat, ist $\frac{1}{5}$.
Also $P(H \text{ und } \bar{T}) = \frac{1}{5}$.

D.h., der Anteil der zufälligen Personen, die keine Tasche und ein Hemd kaufen, beträgt $\frac{1}{5}$.

Der Anteil der Hemd-käufer/innen an den Personen, die keine Tasche kaufen, beträgt $\frac{8}{53}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person ein Hemd aber keine Tasche kauft, beträgt $\frac{8}{53}$.
Also $P(H \text{ und } \bar{T}) = \frac{8}{53}$.

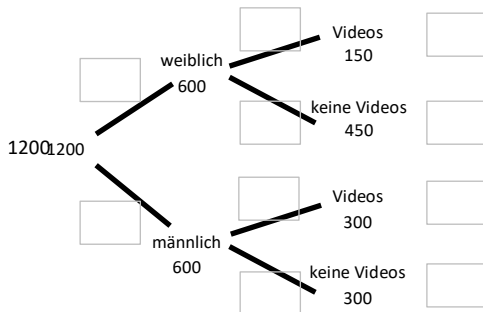


6

Übung: Wahrscheinlichkeiten in Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln



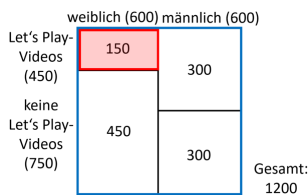
a) Zusammenhänge zwischen zwei Merkmalen kann man auch in Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln darstellen, wie hier zur Umfrage unter Jugendlichen zum Schauen von Let's Play-Videos (Werte leicht abgeändert aus JIM-Studie 2018).



	weiblich	männlich	
Videos	150	300	450
Keine Videos	450	300	750
	600	600	1200

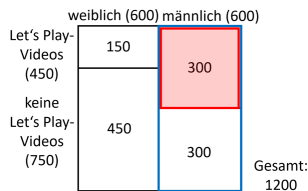
Wo finden Sie die beiden in den Anteilbildern markierten Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm und in der Vierfeldertafel wieder?

- Markieren Sie jeweils Teil und Ganzes im Baumdiagramm und in der Vierfeldertafel. Erklären Sie, um welchen Anteilstyp es sich handelt.
- Formulieren Sie jeweils eine Wahrscheinlichkeit und berechnen Sie wie in **13b)**.



Wahrscheinlichkeit:

Rechnung: $P(\quad) = \frac{\quad}{\quad} =$

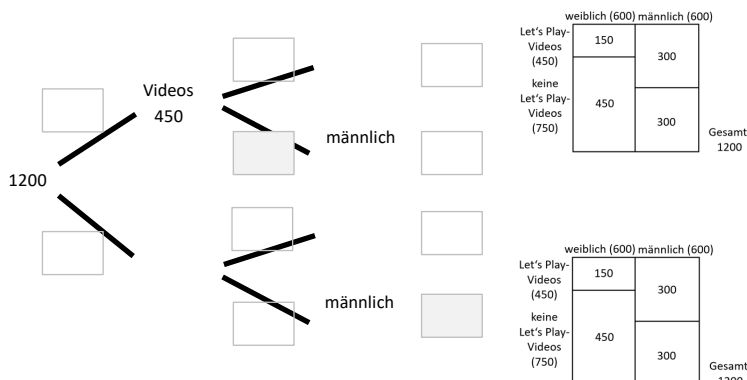


Wahrscheinlichkeit:

Rechnung:



- b) • Vervollständigen Sie das folgende Baumdiagramm.
- Um welche Wahrscheinlichkeiten handelt es sich bei den zwei grau hinterlegten Feldern? Formulieren Sie eine passende Wahrscheinlichkeit und markieren Sie im Anteilsbild. Erklären Sie.



Wahrscheinlichkeit:

Wahrscheinlichkeit:



7

Speicherkiste füllen

Auf dem Arbeitsblatt **Speicherkiste B**
Finden Sie diese Frage zur bedingten
Wahrscheinlichkeit:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
dass eine weibliche Person
Let's Play-Videos schaut?



- a) Erklären Sie auf der Speicherkistenseite, was „**bedingte** Wahrscheinlichkeit“ bzw. „unter der **Bedingung**“ bedeutet.

Verwenden Sie dafür einige der folgenden Satzbausteine. Falls Sie weitere Satzbausteine benötigen, notieren Sie diese auf der Speicherkistenseite.

Einfache / kombinierte /
Teil-vom-Teil Aussage

Ganzes ist... /
Teil ist...

Gruppe erfüllt erstes /
zweites Merkmal

Personen mit ... Merkmal und von
denen alle, die ...

Man setzt voraus, dass ... / Man weiß schon,
dass... / Davon ausgehen, dass ...



- b) Füllen Sie die restlichen Lücken in der **Speicherkiste B**.

Markieren Sie Teil und Ganzes in der Wahrscheinlichkeitsaussage, dem Baumdiagramm und der Vierfelder-Tafel auf der Speicherkistenseite.



Speicherbox B: Bedingte Wahrscheinlichkeiten in drei Darstellungen

Wahrscheinlichkeitsaussage:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine weibliche Person Let's Play-Videos schaut?

„Bedingte“ bzw. „unter der Bedingung“ bedeutet:

Lösen im Anteilsbild:

1. Informationen aus Text und Tabelle ziehen:

Ganzes (ganze Gruppe):

Teil (betrachtete Teilgruppe):

Der Anteil der _____

	weiblich (600)	männlich (600)	
Let's Play-Videos (450)	150	300	Gesamt: 1200
keine Let's Play-Videos (750)	450	300	

2. Anteile im Bild bestimmen:

Ganzes: _____

Teil: _____

Anteil bestimmen als Bruch: _____

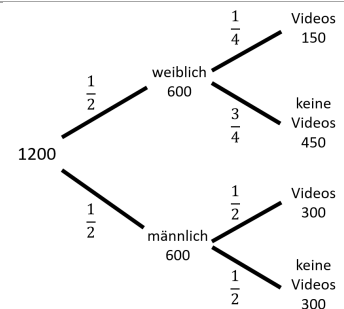
Also ist die Wahrscheinlichkeit _____

Lösen im Baumdiagramm/ Vierfelder-Tafel

1. Informationen aus Text und Tabelle ziehen:

Erstes Merkmal (der ganzen Gruppe)/Bedingung:

Zweites Merkmal (der Teilgruppe):



2. Wahrscheinlichkeit für **erstes Merkmal** bestimmen:

$$P(\text{weiblich}) = \frac{\text{Anzahl betrachteter Fälle}}{\text{Anzahl aller möglicher Fälle}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

	weiblich	männlich	
Videos	150	300	450
Keine Videos	450	300	750
	600	600	1200

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit für **zweites Merkmal**, wenn **Bedingung (erstes Merkmal)** eingetreten ist:

$$P_{\text{weiblich}}(\text{Videos}) = \frac{\text{Anzahl der Teilgruppe mit erstem und zweitem Merkmal}}{\text{Anzahl der ganzen Gruppe mit erstem Merkmal}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Lösen mit Formel

Bedingte Wahrscheinlichkeit für **Ereignis V (2. Merkmal)**, wenn **Ereignis W (Bedingung)** eingetreten ist:

$$P_M(V) = \frac{|V \text{ und } W|}{|W|} = \underline{\hspace{2cm}}$$



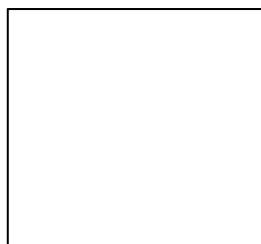
8 Übung: Seltene Krankheit

Ungefähr 5% der Bevölkerung leiden unter einer seltenen Krankheit. Mit einem Test kann untersucht werden, ob eine Person erkrankt ist. Der Test ist jedoch nicht ganz sicher: Bei 20% der Personen, die tatsächlich erkrankt sind, ist das Testergebnis negativ. Der Test zeigt die vorliegende Krankheit also fälschlicherweise nicht an. Mit 90%iger Wahrscheinlichkeit zeigt der Test ein negatives Ergebnis an, wenn der Patient gesund ist.



a) Zeichnen Sie ein Anteilsbild.

Tipp: Die Größe der gesamten Gruppe fehlt hier. Stellen Sie sich z.B. 1.000 Personen vor und zeichnen Sie dafür das Anteilsbild.



b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten. Erklären Sie, welcher Anteil gemeint ist.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einer kranken Person ein positives Testergebnis anzeigt?
- Eine zufällige Person lässt sich testen und erhält ein positives Testergebnis. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person tatsächlich erkrankt?