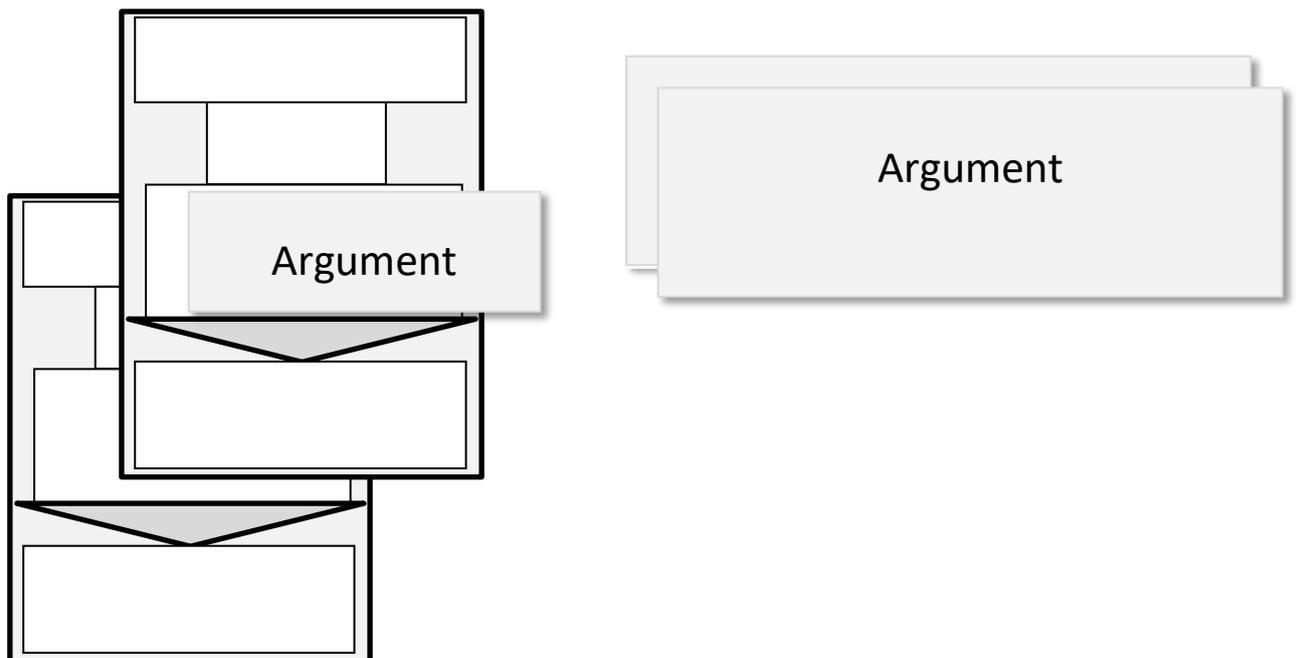


Mathematisch Begründen – die Logik beim Herleiten von mathematischen Sätzen



Dieses Material wurde durch Kerstin Hein und Susanne Prediger konzipiert und kann unter der Creative Commons Lizenz 4.0 International: BY-SA-NC: Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen weiterverwendet werden.

Zitierbar als

Hein, K. & Prediger, S. (2020). Mathematisch Begründen – die Logik vom Herleiten mathematischer Sätze. Unterrichtsmaterial als Open Educational Resources. Online zugänglich unter sima.dzlm.de/um/8-001

Projektherkunft

Dieses fach- und sprachintegrierte Fördermaterial ist entstanden im Rahmen des Projekts MuM-Beweisen (gefördert durch die Stiftung der Deutschen Wirtschaft), als Dissertationsprojekt von Kerstin Hein unter Betreuung von Susanne Prediger.

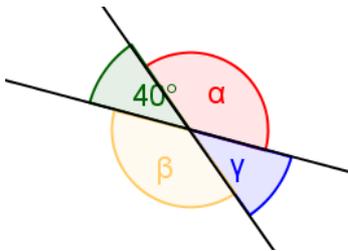
Bildrechte

Alle Grafiken sind selbst erstellt von den Autorinnen, die Personenbilder wurden von Andrea Schink gezeichnet. Einige Icons sind von <https://thenounproject.com/> und <https://iconarchive.com/> übernommen.

A Nutzen von Argumentationsschritten und Argumenten

1 Winkel bestimmen am Geradenkreuz – Begründung A

Wie groß ist der Winkel α ? Begründe deinen Lösungsweg.



a) Bearbeitet zu zweit die Aufgabe mündlich.



- Wie groß ist der Winkel α ?
- Warum hat der Winkel α diese Größe?
- Welche Argumente habt ihr bei eurer Begründung genutzt oder könntet ihr nutzen?



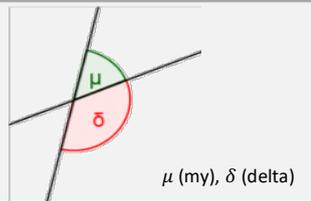
b) Schreibe allein auf, wie ihr euer Ergebnis begründet habt:

2 Mathematische Argumente

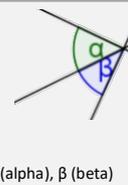
Ihr habt vermutlich die folgenden mathematischen Sätze als Argumente genutzt, vielleicht auch ohne sie zu nennen:

Nebenwinkelargument:

Wenn zwei Winkel an zwei sich schneidenden Geraden nebeneinanderliegen, **dann** bilden die beiden Winkel zusammen einen Winkel von 180 Grad.

**Winkel-Rechen-Argument:**

Wenn zwei Winkel α und β sich nicht überschneiden, **dann** hat der zusammengesetzte Winkel die Größe $\alpha + \beta$, d.h. man kann die Winkelgrößen addieren und subtrahieren.



a) Macht euch gemeinsam mit den beiden Argumenten vertraut.

- Lest euch die Argumente durch.
- Erklärt euch gegenseitig, was die Argumente bedeuten.
- Wozu braucht man überhaupt mathematische Argumente?

Was meint Rico?

Aha, wenn man mathematische Sätze als Argumente benutzt, kann man sicher sein, dass die Begründung stichhaltig ist. Ich kann die mathematischen Sätze wirklich immer benutzen, wenn die Voraussetzungen erfüllt sind. Ein bisschen so wie Werkzeuge. Sie müssen nur passen.

b) Kenan wundert sich über das Winkel-Rechen-Argument.

Ist doch logisch, dass man Winkelgrößen addieren und subtrahieren kann. Warum braucht man dafür extra ein Argument?

Winkel-Rechen-Argument

Leonie

Aber geht das immer? Das klappt ja nur, wenn die Winkel nicht überlappen, oder?

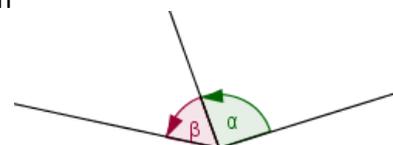


Kenan

Überlegt gemeinsam, wann das Addieren und Subtrahieren keinen Sinn ergeben würde.

Geometrisch kann man sich Winkel als Drehungen gegen den Uhrzeigersinn vorstellen, wie in der Zeichnung:

- Was passiert mit diesen Drehungen, wenn ich die Winkelgrößen α und β addiere, also $\alpha + \beta$ rechne?
- Was passiert mit den Drehungen bei $\alpha - \beta$? Hat Leonie auch für Subtraktion Recht?



3 Mathematischer Werkzeugkasten 1

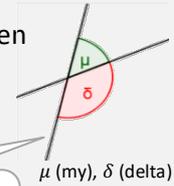
- a) Mathematischen Argumente sind immer so aufgebaut:

Voraussetzung (WENN...)

Schlussfolgerung (DANN...)

Nebenwinkelargument:

Wenn zwei Winkel an zwei sich schneidenden Geraden nebeneinanderliegen, dann bilden die beiden Winkel zusammen einen Winkel von 180 Grad.

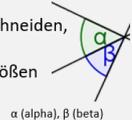


Zeichnung mit der geometrischen Konstruktion

- Was genau bedeutet WENN-DANN eigentlich? Findet eigene Beispiele.

Winkel-Rechen-Argument:

Wenn zwei Winkel α und β sich nicht überschneiden, dann hat der zusammengesetzte Winkel die Größe $\alpha + \beta$, d.h. man kann die Winkelgrößen addieren und subtrahieren.



- b) Sätze, die schon bewiesen wurden, können wie Werkzeuge verwendet werden.

- Ergänzt gemeinsam euren mathematischen Werkzeugkasten. Dazu schneidet ihr für eure Partnerarbeit das Nebenwinkelargument und das Winkel-Rechen-Argument für euer eigenes Material aus (Kopiervorlage auf Seite 22).



Wenn..., dann....

4 Graphische Argumentationsschritte kennenlernen

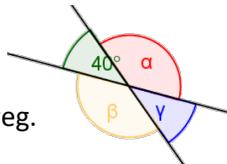
- a) Wenn man ein Argument benutzt, muss man wissen, dass die Voraussetzungen im Argument (WENN...) auch in der Aufgabe erfüllt sind. Aus der Schlussfolgerung (DANN...) kann man schließen, was dann auch für die Aufgabe gilt.



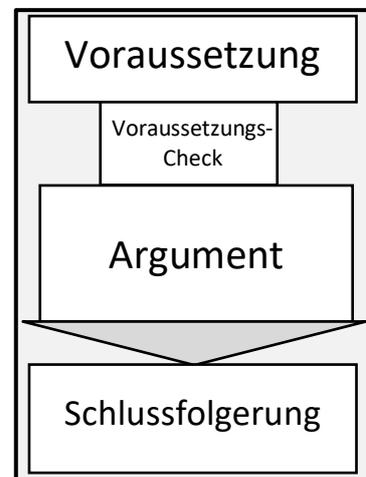
- Schneide dir drei bildlichen Argumentationsschritte aus (von der Kopiervorlage auf Seite 24).

- b) Erinnerung an Aufgabe 1:

- Wie groß ist der Winkel α ? Begründe deinen Lösungsweg.



- Versucht nun, eure Begründung zur Aufgabe 1 mit den bildlichen Argumentationsschritten zu sortieren:

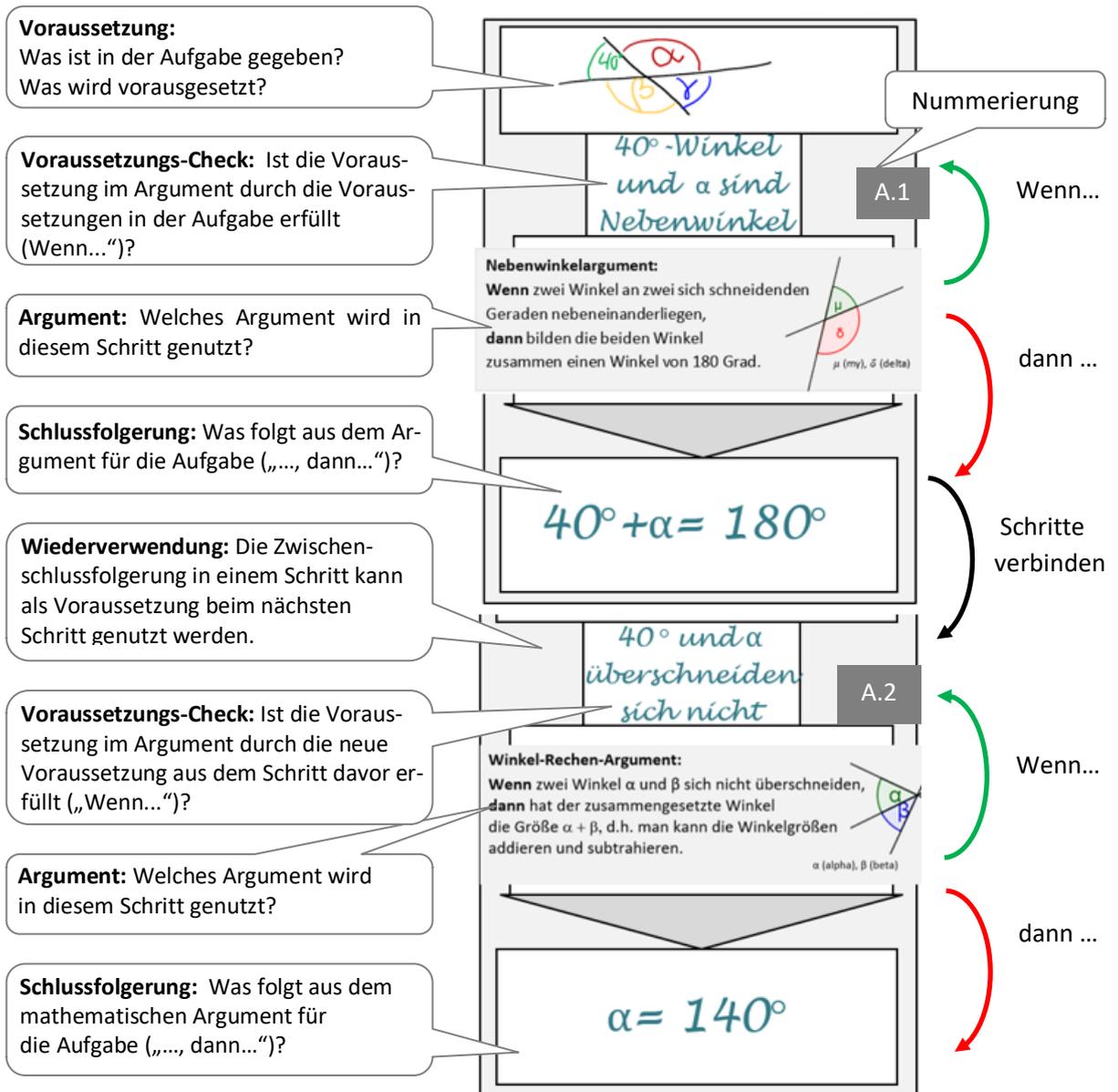


Dabei können euch folgende Fragen helfen, die Felder zu füllen:

1. **Feld (Voraussetzung):** Was ist in der Aufgabe gegeben?
2. **Feld (Voraussetzungs-Check):** Ist die Voraussetzung im Argument durch die Voraussetzungen in der Aufgabe erfüllt (Wenn...“)?
3. **Feld (Argument):** Welches Argument wird in diesem Schritt genutzt?
4. **Feld (Schlussfolgerung):** Was folgt aus dem Argument für die Aufgabe oder für das mathematische Argument?

5 Beispiel für die Argumentationsschritte

So strukturiert man die Begründung A aus Aufgabe 1 mit bildlichen Argumentationsschritten:



- a) • Vergleichen Sie eure Versuche der Begründung mit den bildlichen Argumentationsschritten aus 4 mit dieser Begründung oben:
Was habt ihr schon genauso gemacht, was war noch unterschiedlich?
- Was genau bedeutet Voraussetzungs-Check?
 - Wieso muss man ihn machen?
 - Wieso kann man eine Schlussfolgerung „wieder-verwenden“, was bedeutet das?



- b) Schaut die Regeln für Argumentationsschritte in der Speicherkiste A der nächsten Seite an.
- Erklärt euch gegenseitig wie ihr die Regeln versteht. Ihr könnt dazu die ausgeschnittenen Argumentationsschritte und eure Lösungen von Aufgabe 4 und 5 nutzen.



Speicherkiste A: Nutzen von Argumentationsschritten und Argumenten

Mathematisches Begründen folgt möglichst immer diesen Regeln:

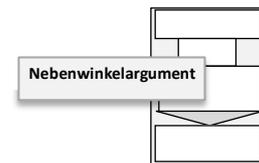
Regel 1: Argumente aus dem Werkzeugkasten
Nur Argumente aus dem jeweiligen Werkzeugkasten
können in den Argumentationsschritten genutzt werden.
Deine Notizen dazu:



Regel 2: Ein Argumentationsschritt – ein Argument

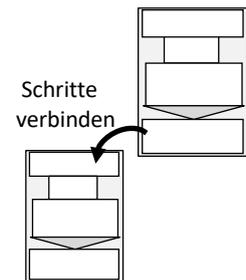
- Jedes Argument wird in einem eigenen Argumentationsschritt genutzt.
- Das Argument kann in das mittlere große Feld gelegt werden oder auch reingeschrieben werden.

Deine Notizen dazu:



Regel 3: Wiederverwendung von Zwischenschlussfolgerungen
Das letzte Feld eines Schritts kann gleich als erstes Feld im nächsten Schritt genutzt werden, wenn die Schlussfolgerung im nächsten Schritt als Voraussetzung genutzt wird, indem die Schritte übereinander gezogen werden.

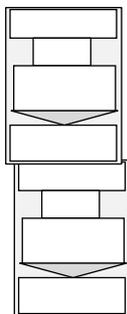
Deine Notizen dazu:



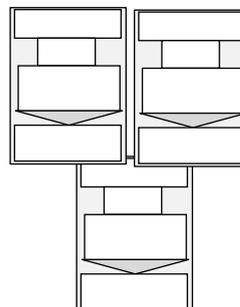
Regel 4: Anordnung der Argumentationsschritte

Die Argumentationsschritte können direkt hintereinander oder auch teilweise parallel angeordnet sein, je nach Anforderung der Aufgabe.

a) direkt hintereinander



b) teilweise parallel

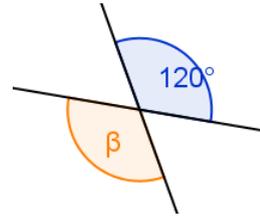


Deine Notizen dazu:

6 Winkel bestimmen am Geradenkreuz – Begründung B



Wie groß ist der Winkel β ? Begründe.



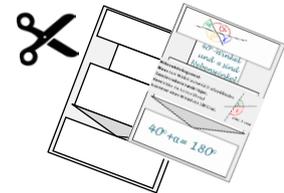
a) Bearbeitet zu zweit die Aufgabe mündlich.

- Wie groß ist der Winkel β ?
- Warum hat der Winkel β diese Größe?
- Könnt ihr den Winkel auch NUR mit den Argumenten aus dem **Werkzeugkasten 1** ermitteln? Vielleicht kennt ihr schon weitere Argumente, aber versucht, diese zu vermeiden. Die weiteren Argumente sollen später erst mit denen aus dem Werkzeugkasten begründet werden.



b) Sortiert nun zu zweit eure Argumentation mithilfe der Argumentationsschritte:

- Welche Argumente aus dem **Werkzeugkasten 1** nutzt ihr?
- Wie viele Argumentationsschritte benötigt ihr also (ein Schritt pro Argument)?
- Schneidet gemeinsam entsprechend so viele Argumentationsschritte aus (aus der Kopiervorlage auf Seite 24).
- Was genau gehört in welches Feld der Argumentationsschritte rein? Schreibt gemeinsam eure Antworten in die Felder.



Tipp: Wenn ihr euch unsicher seid, könnt ihr das Beispiel in der Aufgabe 5 noch mal anschauen.

c) Dokumentiert nun eure Argumentationsschritte:

- Nummeriert die Schritte eurer Begründung **B** (B1, B2, ...), wenn ihr alles fertig habt.
- Schreibt auch in das Feld vom Argument, welches Argument ihr hier benutzt habt, damit ihr die Karten mit den Argumenten weiterverwenden könnt.

B Allgemeine Sätze begründen

7 Scheitelwinkelsatz begründen – Begründung C

Begründet folgenden allgemeinen mathematischen Satz, der Scheitelwinkelsatz genannt wird:

Wenn sich zwei Winkel α und β am Geradenkreuz gegenüberliegen, **dann** sind die Winkel gleich groß.



Emily

Der Satz ist ja jetzt anders als in Aufgabe 1 und 6 bei den Begründungen A und B. Der ist so allgemein und nicht zu einem konkreten Winkel. Wie soll man das jetzt machen?



Tim

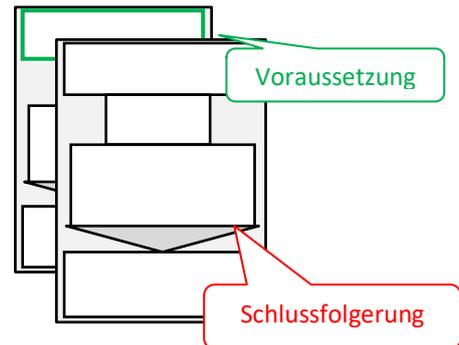
WENN die Voraussetzung gilt, DANN gilt auch die Schlussfolgerung, egal für welche konkreten Winkel.

Um solche allgemeinen Sätze zu begründen, muss man zeigen, wenn man die Voraussetzung hat, dass man daraus dann mit den Argumenten die Schlussfolgerung herleiten kann.



a) Versucht zu zweit, den Satz zu begründen.

- Welche mathematischen Argumente könnt ihr aus dem **Werkzeugkasten 1** bei eurer Begründung nutzen? (nur diese)
- Wie könnt ihr sie anordnen, um in drei Argumentationsschritten von der Voraussetzung zur Schlussfolgerung zu kommen?
- Füllt die Argumentationsschritte wieder aus wie in Aufgabe 5.



b) Wenn ihr fertig seid, prüft und dokumentiert eure Begründung:

- Ist die Reihenfolge der Argumentationsschritte richtig?
- Nummeriert euch eure Schritte dieser Begründung C (C1, C2...), wenn ihr alles fertig habt.
- Schreibt auch in das Feld vom Argument, welches Argument ihr hier benutzt habt, damit ihr die Karten mit den Argumenten weiterverwenden könnt.



c) Nun habt ihr einen bewiesenen mathematischen Satz, der im Werkzeugkasten zum neuen Argument werden kann.

- Schneidet euch ein leeres Argument für die mathematischen Sätze aus (siehe Kopiervorlage auf Seite 23).
- Schreibt das umformulierte Argument auf die leere Karte.
- Schreibt den Namen für das Argument oben links auf die leere Karte.





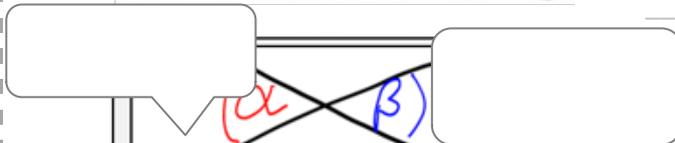
Speicherkiste B: Sprache für Argumente und Begründungen



Füllt in Einzelarbeit die Sprechblasen und den Lückentext in der Speicherkiste aus.

Begründet folgenden allgemeinen mathematischen Satz, der Scheitelwinkelsatz genannt wird:

Wenn sich zwei Winkel α und β am Geradenkreuz gegenüberliegen, dann sind die Winkel gleich groß.



Nebenzwinkelargument:
Wenn zwei Winkel an zwei sich schneidenden Geraden nebeneinanderliegen, dann bilden die beiden Winkel einen Winkel von 180 Grad.



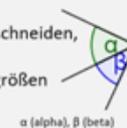
Argument

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta + \gamma = 180^\circ$$

$\alpha, \beta, \gamma, 180^\circ$
überschneiden sich nicht

Winkel-Rechen-Argument:
Wenn zwei Winkel α und β sich nicht überschneiden, dann hat der zusammengesetzte Winkel die Größe $\alpha + \beta$, d.h. man kann die Winkelgrößen addieren und subtrahieren.



$$\alpha = \beta$$

Es soll gezeigt werden, dass _____

Wir haben _____

_____ gegeben.

Damit haben wir hier _____

_____ vorliegen.

Daher können wir _____

_____ anwenden.

Das _____-Argument besagt,

dass „Wenn _____

Daraus folgt, dass _____

Was wir geschlussfolgert haben, können wir

im nächsten Argumentationsschritt als

Voraussetzung ansehen:

Weil damit _____

vorliegen, können wir den _____

_____ anwenden.

Nach dem _____-Argument

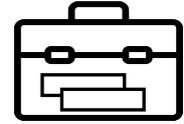
gilt, dass _____

Also gilt, dass _____

Damit haben wir gezeigt, dass _____

8 Mathematischer Werkzeugkasten 2

Ab hier könnt ihr folgende Argumente verwenden:



Nebenwinkelargument

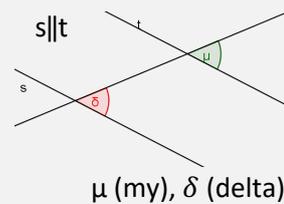
Winkel-Rechen-Argument

Zusätzlich:

Argument aus
Aufgabe 7

Stufenwinkelargument:

Wenn zwei parallele Geraden s und t von einer dritten Geraden geschnitten werden,
dann sind die Winkel μ und δ gleich groß.



Ergänzt gemeinsam euren mathematischen Werkzeugkasten:

- Schreibt den Namen eures Arguments aus Aufgabe 7 in das leere Feld im Werkzeugkasten.
- Lest euch das Stufenwinkelargument durch.
- Schneidet euch das Stufenwinkelargument für euer eigenes Material aus (Kopiervorlage auf Seite 22).



Wenn..., dann...

9 Regelerweiterung



Regel 5: Nutzung selbst geschriebener Argumente

Selbst geschriebene Argumente, die mit den Argumenten aus dem Werkzeugkasten begründet wurden, können im Werkzeugkasten ergänzt werden, und bei den Argumentationsschritten genutzt werden.



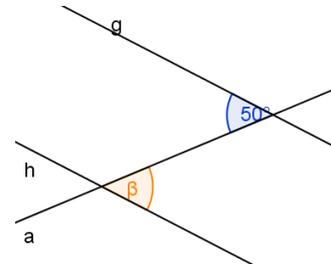
Schaut euch gemeinsam die **Regel 5** gemeinsam an.

- Lest euch die Regeln durch.
- Erklärt euch gegenseitig, wie ihr die Regeln versteht.

C Selbst hergeleitetes Argument nutzen

10 Gerade schneidet zwei parallele Geraden I – Begründung D

Wie groß ist der Winkel β ? Begründe.



a) Bearbeitet zu zweit die Aufgabe mündlich.

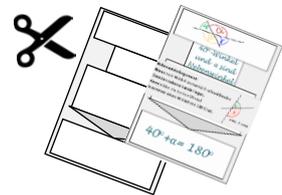
- Wie groß ist der Winkel β ?
- Warum hat der Winkel β diese Größe?
Welche Argumente habt ihr aus dem Werkzeugkasten 2 bei eurer Begründung genutzt oder könntet ihr nutzen?

Hinweis: Vielleicht kennt Ihr schon einen mathematischen Satz, aus dem ihr die Größe direkt begründen könnt. Versucht es dennoch nur mit den Argumenten aus **Werkzeugkasten 2**. Das hilft uns später, den noch nicht begründeten Satz nur mit diesen Argumenten aus dem Werkzeugkasten zu begründen.



b) Schreibt zu zweit eure Anwendung auf die Argumentationsschritte.

- Welche Argumente von den Argumenten aus dem **Werkzeugkasten 2** nutzt ihr?
- Wie viele Argumentationsschritte benötigt ihr also (ein Schritt pro Argument)? Schneidet entsprechend so viele Argumentationsschritte aus (siehe Kopiervorlage auf Seite 24).
- Was muss in die einzelnen Felder der Argumentationsschritte rein?
- Schreibt gemeinsam eure Antworten in die Felder.

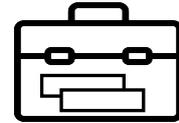


Tipp: Schaut euch **Speicherbox A** an. Beachtet hier insbesondere Regel 4.

- c) Dokumentation: Nummeriert euch eure Schritte **D** (D1, D2, ...), wenn ihr alles fertig habt. Schreibt auch in das Feld vom Argument, welches Argument ihr hier benutzt habt, damit ihr die Karten mit den Argumenten weiterverwenden könnt.

11 Mathematischer Werkzeugkasten 3

Ab hier könnt ihr folgende Argumente verwenden:



Nebenwinkelargument

Winkel-Rechen-Argument

Argument aus
Aufgabe 7

Stufenwinkelargument

Zusätzlich:

Gleichheitsargument

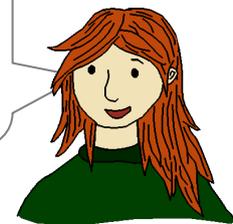
Wenn für die Winkelgrößen δ , μ und π

$\delta = \mu$ und $\mu = \pi$ gilt,

dann ist auch $\delta = \pi$.

δ (delta), μ (my), π (pi)

Das Gleichheitsargument besagt also, dass wenn ein Winkel so groß ist wie ein zweiter Winkel und der zweite Winkel so groß wie der dritte Winkel, dass dann der erste Winkel auch genauso groß ist wie der dritte Winkel.



Leonie



Ergänzt gemeinsam euren mathematischen Werkzeugkasten:

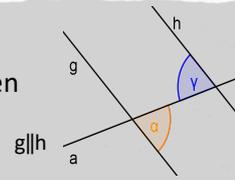
- Schreibt den Namen eures Arguments aus Aufgabe 7 in das leere Feld im Werkzeugkasten.
- Lest euch das Gleichheitsargument durch. Was meint Leonie?
- Schneidet euch das Gleichheitsargument für euer eigenes Material aus (Kopiervorlage auf Seite 22).



12 Wechselwinkelsatz begründen – Begründung E

Begründet folgenden allgemeinen mathematischen Satz, der **Wechselwinkelsatz** genannt wird:

Satz: Die diagonal gegenüberliegenden Winkel γ und α an den parallelen Geraden g und h sind immer gleich groß.



a) Formuliert zu zweit den Satz in eine WENN-DANN-Formulierung um:

**Tipps:**

- Schaut ein anderes mathematisches Argument aus dem Werkzeugkasten als Beispiel an.
- Schaut euch **Regel 5** und **Speicherbox A** an.



b) Überlegt zu zweit:

- Welche mathematischen Argumente habt ihr aus dem Werkzeugkasten 3 bei eurer Begründung genutzt oder könntet ihr nutzen?



c) Schreibt zu zweit eure Anwendung auf die Argumentationsschritte.

- Welche Argumente aus dem **Werkzeugkasten 3** nutzt ihr?
- Wie viele Argumentationsschritte benötigt ihr also (ein Schritt pro Argument)? Schneidet entsprechend so viele Argumentationsschritte aus (siehe Kopiervorlage auf Seite 24).
- Schreibt oder zeichnet die **Voraussetzungen (WENN...)** in das erste Feld vom ersten Argumentationsschritt und die **Schlussfolgerung (DANN...)** in das letzte Feld vom letzten Argumentationsschritt.
- Ist die Reihenfolge der Argumentationsschritte richtig?

Dokumentation: Nummeriert euch eure Schritte **E** (E1, E2, ...), wenn ihr alles fertig habt.

Schreibt auch in das Feld vom Argument, welches Argument ihr hier benutzt habt, damit ihr die Karten mit den Argumenten weiterverwenden könnt.



d) Schreibt zu zweit einen neuen mathematischen Satz, auf Grundlage der allgemeinen Anwendung in den Argumentationsschritten.

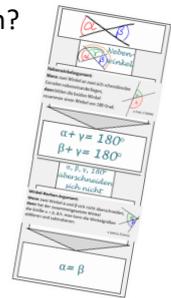
- Schneidet euch eine leere Karte für die Argumente aus (siehe Kopiervorlage auf Seite 23).
- Schreibt den neuen mathematischen Satz in Wenn-Dann-Formulierung auf die leere Karte.
- Schreibt den Namen für den Satz oben links auf die leere Karte.



13 Versprachlichung von Begründungen 1

-  a) Ihr habt nun die Felder ausgefüllt, aber kann man die Begründung gut formulieren? Findet zu zweit (erst mal mündlich) gute Formulierungen. Ihr könnt euch dazu entlang der ausgefüllten Anwendungsstrukturen aus Aufgabenteil 12 c die Inhalte der Felder und deren Zusammenhänge von oben nach unten erzählt.

Tipps: Ihr könnt die **Speicherbox B** als Vorbild nutzen.



-  b) Schreibt eure Anwendung nun noch einmal alleine mit Worten auf, indem ihr eure ausgefüllten Argumentationsschritte nutzt. Nutzt dazu ein zusätzliches Blatt Papier.



Tipps:

- Schaut euch eure ausgefüllten Argumentationsschritte an.
- Schaut euch **Speicherbox B** an.



-  c) Gebt euch gegenseitig Rückmeldungen.
- Was gefällt euch gut am Text des anderen?
 - Was würdet ihr noch verbessern wollen?
 - Welche sprachliche Formulierung findet ihr gut?

-  d) Überarbeite deinen Text mit den Rückmeldungen noch mal alleine.
- Mache Änderungen in deinem Text auf Grundlage der Rückmeldung.
 - Schreibe dir mit den Rückmeldungen auf, die du bekommen hast, welche Wörter und Satzbausteine wichtig sind.



Wichtige Wörter und Satzbausteine:

-  e) Übertragt nun gemeinsam die von euch gesammelten Wörter und Satzbausteine in die **Speicherbox C** auf der nächsten Seite.





Speicherbox C: Sprache für Verschriftlichungen

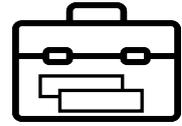
Wichtige Wörter und Satzbausteine
für die Argumentationsschritte:
Wir haben gegeben...

*...können wir im nächsten Schritt
nutzen.*

Wichtige Wörter und Satzbausteine
für mathematische Sätze:
Wenn...

14 Mathematischer Werkzeugkasten 4

Ab hier könnt ihr folgende Argumente verwenden:



Nebenwinkelargument

Winkel-Rechen-Argument

Argument aus
Aufgabe 7

Stufenwinkelargument

Gleichheitsargument

Zusätzlich:

Argument aus
Aufgabe 12

Gestreckter-Winkel-Argument:

Wenn ein Winkel an einer Geraden vorliegt,
dann ist er 180 Grad groß.



Ergänzt gemeinsam euren mathematischen Werkzeugkasten:

- Schreibt den Namen eurer Argumente aus Aufgabe 7 und 12 in die leeren Felder im Werkzeugkasten.
- Lest euch das Gestreckter-Winkel-Argument durch.
- Schneidet euch das Gestreckter-Winkel-Argument für euer eigenes Material aus (Kopiervorlage auf Seite 22).



Wenn... dann...

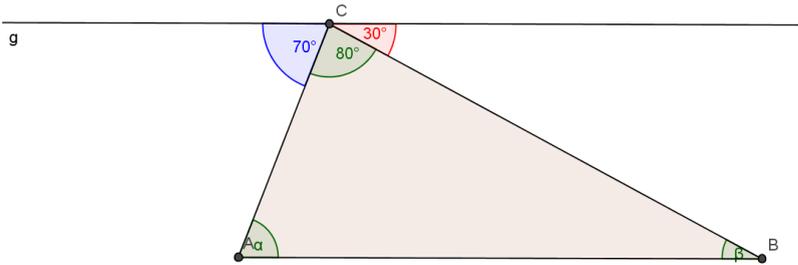
D Selbst hergeleitete Argumente nutzen

15 Winkel im Dreieck bestimmen – Begründung F

Die Gerade g ist parallel zur Seite AB .

Wie groß sind alle Winkelmaße im Dreieck ABC zusammen?

Begründe!



a) Bearbeitet zu zweit die Aufgabe mündlich.

- Wie groß sind die Winkelmaße im Dreieck ABC zusammen?
- Welche Argumente habt ihr aus dem **Werkzeugkasten 4** bei eurer Begründung genutzt oder könntet ihr nutzen?

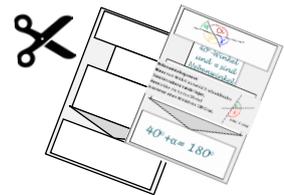
Hinweis:

Ihr kennt sicher schon ein Argument. Versucht es dennoch mit den Argumenten aus dem **Werkzeugkasten 4**.



b) Schreibt zu zweit eure Anwendung auf die Argumentationsschritte.

- Welche Argumente aus dem **Werkzeugkasten 4** nutzt ihr?
- Wie viele Argumentationsschritte benötigt ihr also (ein Schritt pro Argument)? Schneidet entsprechend so viele Argumentationsschritte aus (siehe Kopiervorlage auf Seite 24).
- Was muss in die einzelnen Felder der Argumentationsschritte rein?
- Schreibt gemeinsam eure Antworten in die Felder.



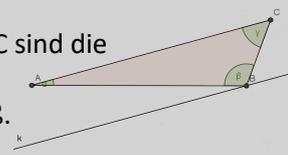
Dokumentation: Nummeriert euch Eure Schritte **F** (F1, F2, ...), wenn ihr alles fertig habt.

Schreibt auch in das Feld vom mathematischen Argument, welches Argument ihr hier benutzt habt, damit ihr die Karten mit den mathematischen Argumenten weiterverwenden könnt.

16 Innenwinkelsummensatz im Dreieck begründen – Begründung G

Begründet folgenden mathematischen Satz, der Innenwinkelsummensatz genannt wird:

In jedem Dreieck ABC sind die Winkel α , β und γ zusammen 180° groß.

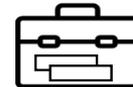


(Die Gerade k durch B ist parallel zur Seite AC.)

a) Formuliert zu zweit den Satz in eine WENN-DANN-Formulierung um:



Hinweis: Wenn ihr euch unsicher seid, könnt ihr andere Argumente aus dem Werkzeugkasten anschauen.



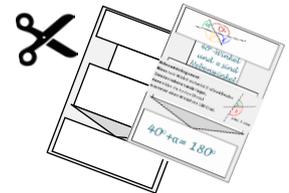
b) Bearbeitet zu zweit die Aufgabe mündlich.

- Wie kann man den Satz begründen?
- Welche Argumente habt ihr aus dem **Werkzeugkasten 4** bei eurer Begründung genutzt oder könntet ihr nutzen?



c) Schreibt zu zweit eure Anwendung auf die Argumentationsschritte.

- Schneidet so viele Argumentationsschritte aus wie ihr benötigt (siehe Kopiervorlage auf Seite 24).
- Schreibt oder zeichnet die Voraussetzungen (WENN...) in das erste Feld vom ersten Argumentationsschritt und die Schlussfolgerung (...DANN) in das letzte Feld vom letzten Argumentationsschritt.



Dokumentation: Nummeriert euch eure Schritte **G** (G1, G2, ...), wenn ihr alles fertig habt. Schreibt auch in das Feld vom mathematischen Argument, welche Argumente ihr hier benutzt habt, damit ihr die Karten mit den mathematischen Sätzen weiterverwenden könnt.



d) Schreibt zu zweit ein neues mathematisches Argument auf Grundlage der allgemeinen Anwendung in den Argumentationsschritten.

- Schneidet euch eine leere Karte für die mathematischen Sätze aus (siehe Kopiervorlage auf Seite 23).



e) Versprachlicht eure allgemeine Anwendung zu zweit mündlich.

Tipp: Schaut euch **Speicherbox C** an.



17 Versprachlichung von Begründungen 2



- a) Schreibt eure Anwendung nun noch einmal alleine mit Worten auf, indem ihr eure ausgefüllten Argumentationsschritte nutzt. Nutzt dazu ein zusätzliches Blatt Papier.

**Tipps:**

- Schaut euch eure ausgefüllten Argumentationsschritte an.
- Schaut euch **Speicherbox C** an.



- b) Gebt euch gegenseitig Rückmeldungen:



- c) Überarbeite deinen eigenen Text mit den Rückmeldungen:
- Mache Änderungen in deinem Text auf Grundlage der Rückmeldung.
 - Schreibe aufgrund deiner Rückmeldungen, die du bekommen hast, auf, welche Wörter und Satzbausteine wichtig sind.



Wichtige Wörter und Satzbausteine:

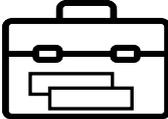


- d) Ergänzt nun gemeinsam die von euch gesammelten Wörter und Satzbausteine in die **Speicherbox C** (Seite 15).



18 Mathematischer Werkzeugkasten 5

Ab hier sind folgende mathematische Argumente in eurem Werkzeugkasten:



Nebenwinkelargument **Winkel-Rechen-Argument**

Argument aus Aufgabe 7

Stufenwinkelargument **Gleichheitsargument**

Argument aus Aufgabe 12

Gestreckter-Winkel-Argument

Zusätzlich: Argument aus Aufgabe 16



Ergänzt gemeinsam euren mathematischen Werkzeugkasten:

- Schreibt den Namen eurer Argumente aus den **Aufgaben 7, 12 und 16** in die leeren Felder im Werkzeugkasten.

19 Aufbau mathematischer Argumente

A. Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

B. Hat ein Dreieck drei 60 Grad-Winkel, so ist es gleichseitig.



a) Erkläre alleine die beiden Teile der mathematischen Argumente.

- Woran erkennst du die Voraussetzung im Argument?
- Woran erkennst du die Schlussfolgerung im Argument?

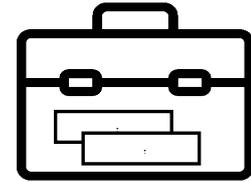
A.

B.



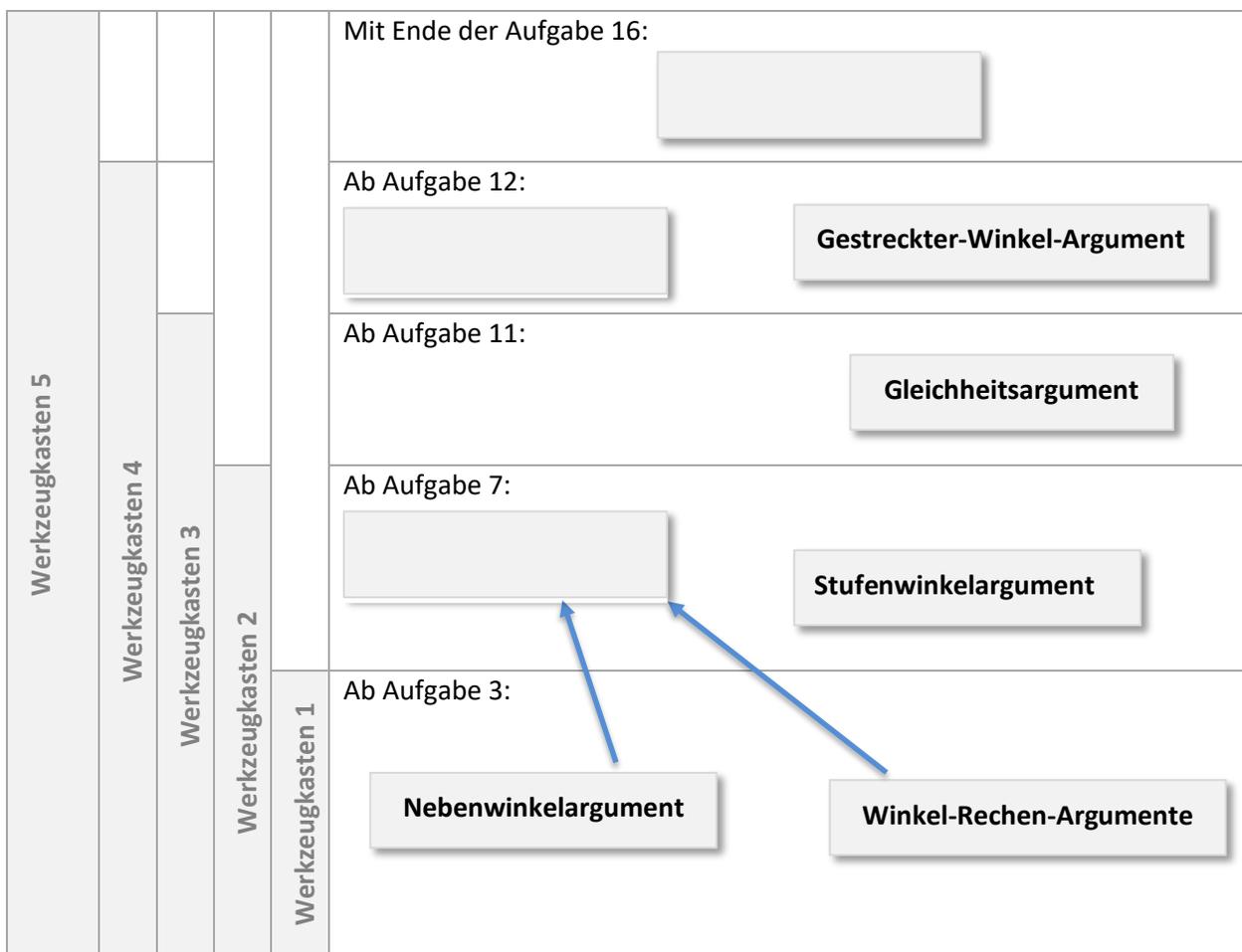
b) Gebt euch gegenseitig Rückmeldungen.

20 Aufbau der Werkzeuge im mathematischen Werkzeugkasten



Ordnet gemeinsam eure Argumente noch mal den einzelnen Erweiterungen des Werkzeugkastens zu:

- Ergänzt eure Argumente noch in den leeren Feldern.
- Überlegt gemeinsam, welches Argument mit welchem Argument begründet wurde.
- Verbindet die Argumente, die ihr genutzt habt, mit den Argumenten, die ihr daraus hergeleitet habt mit Pfeilen (wie schon im Beispiel für das Argument aus **Aufgabe 7**).





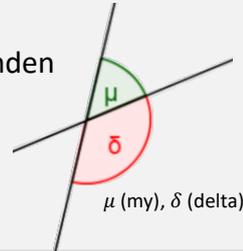
Mathematische Argumente zum Ausschneiden

Wenn..., dann...

Ab
Aufgabe 3

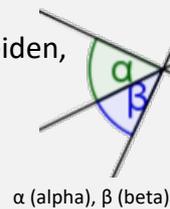
Nebenwinkelargument:

Wenn zwei Winkel an zwei sich schneidenden Geraden nebeneinanderliegen, dann bilden die beiden Winkel zusammen einen Winkel von 180 Grad.



Winkel-Rechen-Argument:

Wenn zwei Winkel α und β sich nicht überschneiden, dann hat der zusammengesetzte Winkel die Größe $\alpha + \beta$, d.h. man kann die Winkelgrößen addieren und subtrahieren.

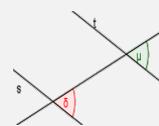


Ab
Aufgabe 8

Stufenwinkelargument:

Wenn zwei parallele Geraden s und t von einer dritten Geraden geschnitten werden, dann sind die Winkel μ und δ gleich groß.

$s \parallel t$



μ (my), δ (delta)

Ab
Aufgabe 11

Gleichheitsargument:

Wenn für die Winkelgrößen δ , μ und π $\delta = \mu$ und $\mu = \pi$ gilt, dann ist auch $\delta = \pi$.

δ (delta), μ (my), π (pi)

Ab
Aufgabe 14

Gestreckter-Winkel-Argument:

Wenn ein Winkel an einer Geraden vorliegt, dann ist er 180 Grad groß.





Mathematische Argumente zum Ausschneiden und Selbstformulieren

Wenn..., dann...

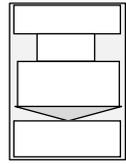
Aufgabe 7

Aufgabe 12

Aufgabe 16

Druck- oder Kopiervorlage:
Graphische Argumentationsschritte

(2-4 Stück pro Aufgabe benötigt)

A large template for graphical argumentation steps. It consists of a central rectangular box with a downward-pointing triangular flap, and two smaller rectangular boxes on either side, all within a larger frame. The central box is intended for the main argument, while the side boxes are for supporting evidence or steps.