Didaktischer Kommentar zur
SiMa-Unterrichtseinheit ab Klasse 7:

Zusammenhänge allgemein beschreiben mit Variablen und Termen

Dieses Material wurde durch Stefan Korntreff, Susanne Prediger (und in den ersten Aufgaben von Nadine Krägeloh und Tamsin Meaney) konzipiert und kann weiterverwendet werden unter der Creative Commons Lizenz BY-SA: Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International.

Zitierbar als Korntreff, Stefan & Prediger, Susanne (2022). Zusammenhänge allgemein beschreiben mit Variablen und Termen. Didaktischer Kommentar zum SiMa-Unterrichtsmaterial. Open Educational Resources, zugänglich unter sima.dzlm.de/um/8-002

Projektherkunft Dieses sprachbildende Unterrichtsmaterial ist entstanden im Rahmen des Projekts MuM-Video (gefördert durch das BMBF mit Förderkennzeichen 01JD2001A, Projektleitung Susanne Prediger und Mike Altieri) und wird erprobt im Rahmen des Projekts FachBiss: BiSS-Transfer-Forschungsnetzwerk (gefördert durch das BMBF mit Förderkennzeichen 01JI2001E, Projektleitung Susanne Prediger).

Bildrechte Alle Bilder sind von den Autoren selbst erstellt oder mit Quelle ausgewiesen.

Steckbrief zur Unterrichtseinheit:

Klassenstufe ab Klasse 7 (in vielen Bundesländern Klasse 8)

Dauer Baustein A: 1-2 Doppelstunden, Baustein B: 2 Doppelstunden, Baustein C: 2 Doppelstunden, Baustein D: 1-2 Doppelstunden

Material Alle 4 Erklärvideos können gestreamt werden. Dafür ist ein Internetzugang erforderlich. Die nicht-interaktive Erklärvideos können auch heruntergeladen werden. Dafür den Videolink aufrufen und Rechtsklick „Video speichern unter“ nutzen.
Entsprechend sind Laptops, PCs oder Tablets erforderlich, damit die Lernenden in Paaren/Kleingruppen mit den Videos arbeiten können.
Für die mit einem **T** gekennzeichneten Aufgaben ist ein Tabellenkalkulationsprogramm erforderlich.

Inhalt:

Ziel des Unterrichtsmaterials 1
Lernziele: Anvisierte Kompetenzen des Unterrichtsmaterials 3
Aufbau des Unterrichtsmaterials: Kompetenzentwicklung in den Bausteinen A bis D 4
Zentrale Sprachhandlungen im Unterrichtsmaterial 9
Überblick: Fachliche und sprachliche Anforderungen des Themenfelds 10
Die Rolle von Erklärvideos und Tabellenkalkulation im Unterrichtsmaterial 11
Literatur und Unterrichtsfilm 11
Struktur des Unterrichtsmaterials im Überblick 12
Lösungsvorschläge und Hinweise zu den Aufgaben des Unterrichtsmaterials 13

Ziel des Unterrichtsmaterials: Aufbau von Variablenverständnis

Die Nutzung von Variablen, dargestellt durch Buchstaben, ist eine der zentralen Errungenschaften der Mathematik. Variablen erlauben es nicht nur, komplexe Zusammenhänge kompakt zu beschreiben ($A = {}^1/_2\, g\, h$) und gesuchten Objekten eine Bezeichnung zu geben ($x^2 + 5 = 8$), sondern sie ermöglichen auch die Nutzung eines effizienten (algebraischen) Kalküls. So leistungsstark diese schillernden Einsatzmöglichkeiten der Variable in der Mathematik auch sind, so herausfordernd ist es für Lernende, den Facettenreichtum der Variable „nachzuerfinden".

Informiert durch eine jahrzehntelange empirische Forschung zur elementaren Algebra[1] lassen sich drei wichtige Herausforderungen beim Aufbau eines soliden Variablenverständnisses identifizieren:

1. **Symbole inhaltlich deuten**: Eine erfolgreiche und verständige Nutzung des algebraischen Kalküls (beim Umformen von Termen und Gleichungen) setzt ein inhaltliches Verständnis der Variable voraus: Die Lernenden müssen also die Variable sowie die Terme und Gleichungen in unterschiedlichen Sachkontexten inhaltlich deuten können, damit die Rechenregeln nicht beliebig sind. Dementsprechend wird in diesem Unterrichtsmaterial immer wieder Gelegenheit geboten, Variablen, Terme und Gleichungen inhaltlich zu interpretieren. Hierbei dienen Tabellen als wichtiges Darstellungsmittel, um Situationskontext, Zahlen- und Variablenterme miteinander zu verknüpfen (siehe Abb. 1).

E-Scooter Servicepreis
0,15 € pro Minute und
1 € für's Entsperren

Tag	Fahrzeit (in min)	Kosten für Fahrzeit (in €)	Term für Gesamtkosten (in €)	Gesamtkosten ausgerechnet (in €)
16. Mai	20	20 · 0,15	20 · 0,15 + 1	4,00
19. Mai	12	12 · 0,15	12 · 0,15 + 1	2,80
24. Mai	27	27 · 0,15	27 · 0,15 + 1	5,05
29. Mai	33	33 · 0,15	33 · 0,15 + 1	5,95
Für jede beliebige Fahrzeit:	x	x · 0,15	x · 0,15 + 1	

Abb. 1: Tabelle zum Verknüpfen von E-Scooter-Kontext, Zahlentermen und Variablentermen

2. **Verschiedene Deutungen der Variable nutzen**: Eine große Herausforderung bei der Deutung des Variablenkonzepts besteht darin, dass eine Variable ihren Sinn aus ganz unterschiedlichen mathematischen Denkhandlungen bezieht (siehe Abb. 2):
   - Für Variablen kann man Zahlen *einsetzen* und dadurch Terme *auswerten*,
   - mit Variablen kann man *Zusammenhänge verallgemeinern*,
   - mit Hilfe von Variablen kann man *unbekannte* Zahlen kennzeichnen und diese *ermitteln*.

   Die Herausforderung ist also, dass die Lernenden für die unterschiedlichen Deutungen der Variable ein Verständnis aufbauen müssen. Aus diesem Grund werden in diesem Unterrichtsmaterial mehrere Denkhandlungen eingefordert, mit denen die Lernenden insbesondere die herausfordernden Deutungen der *Variable als Veränderliche* (Baustein A und B) und die *Variable als Unbekannte* (Baustein C) nacherfinden können. Zudem werden die verschiedenen Deutungen anhand der Tabelle sichtbar gemacht (siehe Abb. 2 linke Spalte):
   - Beim Einsetzen einer Zahl in den Term wird die Tabelle *horizontal von links nach rechts* entlang einer Zeile gelesen („100 min Fahrzeit mal die 0,15 € pro Minute und den einen Euro für's Entsperren ergeben einen Gesamtpreis von 16 €.");

[1] U.a. Usiskin 1988, Malle 1993, Kieran 2006, Prediger 2009, Prediger & Krägeloh 2016, Warren et al. 2016

- beim Verallgemeinern wird die Tabelle *vertikal* entlang der Spalten gelesen („Die Variable x umfasste alle möglichen Fahrzeiten, die ich jemals in die Spalte schreiben könnte.“);
- beim Ermitteln der Unbekannten wird die Tabelle wieder *horizontal* gelesen, nun aber *von rechts nach links* entlang einer Zeile („Wie lange kann ich für 13 € E-Scooter fahren? Ausgegend von den vorgegebenen Gesamtkosten von 13 € rechne ich rückwärts und ziehe zuerst den einen Euro für’s Entsperren ab und schaue, wie oft der Minutenpreis 0,15 € in die 12 € passen.“).

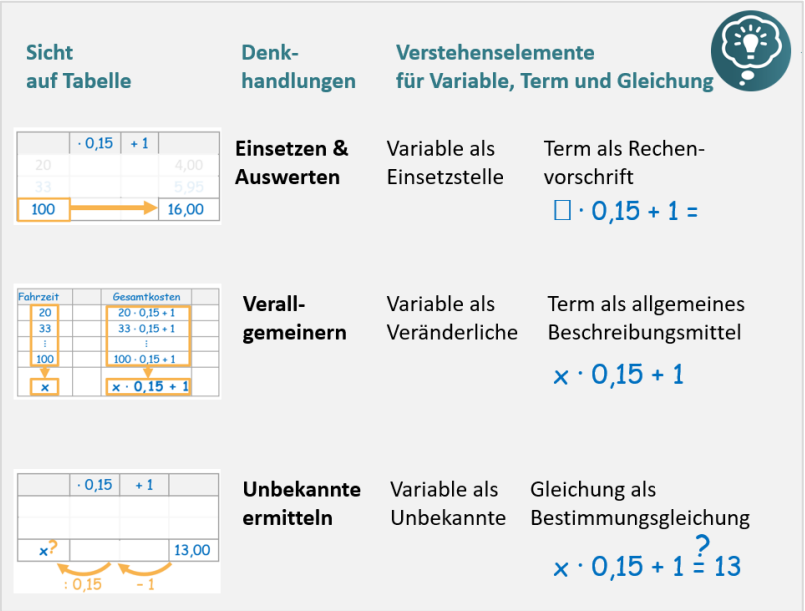


Abb. 2: Variablen-Deutungen der verschiedenen Denkhandlungen und Sicht auf Tabelle

3. **Verschiedene Deutungen der Variable in Beziehung setzen**: Dass eine Variable in unterschiedlichen mathematischen Denkhandlungen verschieden gedeutet werden muss, erzeugt bei Lernenden häufig die folgenden Schwierigkeiten:
   - *Variablen-Deutungen werden vermischt*: Bspw. sind aus empirischen Studien[2] Lernende bekannt, die beim Beschreiben allgemeiner Zusammenhänge wie $y = 0{,}15x + 1$ immer irgendeine konkrete Zahl für x einsetzen wollen und den Term auswerten, „weil sich das sonst so unfertig anfühlt“. Hier werden also Deutungen des Einsetzens und Suchens nach konkreten Zahlen aktiviert, obwohl es eigentlich darum geht, einen Zusammenhang allgemein zu beschreiben.
   - *Umdeuten von Variablen schlägt fehl*: Beim Lösen mathematischer Probleme muss häufig zwischen verschiedenen Deutungen der Variable gewechselt werden, bspw. wenn zu einer allgemein beschriebenen Funktion $y = 0{,}15x + 1$ Nullstellen bestimmt werden sollen: $0{,}15x + 1 = 0$. Hier muss die Variable also „von einem Schritt zum nächsten“ umgedeutet werden, nämlich von einer Veränderlichen („x steht für alle möglichen Zahlen“) zu einer Unbekannten („x steht für die eine gesuchte Nullstelle“). Manche Lernende scheitern an diesem Umdeutungsprozess.

   Im vorliegenden Unterrichtsmaterial werden diese beiden Schwierigkeiten dadurch adressiert, dass die verschiedenen Deutungen der Variable mit den Lernenden reflektiert und Umdeutungsprozesse explizit zum Thema gemacht werden (Baustein D). Es wird also mit den Lernenden explizit darüber gesprochen, dass Variablen in unterschiedlichen Situationen unterschiedliche Deutungen haben können.

---

[2] U.a. Bardini et al. 2005, Korntreff & Prediger 2022a

Lernziele: Anvisierte Kompetenzen in der Unterrichtseinheit

Entsprechend der zuvor skizzierten Herausforderungen für den Aufbau eines soliden Verständnisses von Variablen verfolgt das vorliegende Unterrichtsmaterial den Aufbau der folgenden Kompetenzen:

Kompetenzen	Bsp. im E-Scooter-Kontext (Abb. 1)
K1) Die Lernenden können **Variablen situationsangemessen deuten** und verschiedene **Variablen-Deutungen kontrastieren**, d. h.	
a) sie **deuten** die **Variable als Veränderliche**, also als Bezeichnung für alle relevanten Zahlen (des Definitionsbereiches), um einen allgemeinen Zusammenhang zu beschreiben;	Die Variable steht für *alle möglichen* Fahrzeiten auf einmal; sie steht für *jede beliebige* Fahrzeit.
b) sie **deuten** die **Variable als Unbekannte**, also als Bezeichnung für unbekannte Zahlen, die mit Hilfe von Gleichungen gesucht werden;	Die Variable steht für *die gesuchten* Fahrzeiten, wenn ich insgesamt nur 13 € bezahlen möchte.
c) sie **unterscheiden** die Variable als **Veränderliche und** als **Unbekannte explizit voneinander**.	In $y = x \cdot 0{,}15 + 1$ steht das x für *alle möglichen* Zahlen. Damit beschreibe ich die Gesamtkosten *ganz allgemein*. Wenn ich die Gesamtkosten *festlege*, z. B. $x \cdot 0{,}15 + 1 = 13$, dann stimmt die Rechnung *nur noch für eine konkrete* Fahrzeit.
K2) Die Lernenden können **Terme und Gleichungen als Beziehungen** zwischen Größen im Sachkontext **interpretieren** und nutzen dabei **Terme als (allgemeine) Beschreibungsmittel** und **Gleichungen als Bedingung** an eine unbekannte Zahl, d. h.	
a) sie **deuten** die in Term/Gleichung vorkommenden **Zahlen/Größen** und **Variablen** im Sachkontext;	0,15 steht für den Minutenpreis in €; x steht für jede beliebige Fahrzeit.
b) sie **begründen** die vorkommenden **Operationen** als Beziehungen zwischen Größen;	Ich rechne mal in $20 \cdot 0{,}15$, weil ich 20-mal den Preis für eine Minute bezahle.
c) sie **deuten komplexe Teilterme** als eine Größe;	Das Produkt $x \cdot 0{,}15$ sind die Kosten für jede beliebige Fahrzeit.
d) sie **argumentieren inhaltlich für** die **Allgemeingültigkeit** von Termen;	Der Term $x \cdot 0{,}15$ stimmt für alle möglichen Fahrzeiten, weil ich *immer* so viel Mal den Minutenpreis von 0,15 € bezahlen muss, wie ich Minuten gefahren bin, also *immer* Minutenzahl mal 0,15 €.
e) sie **deuten das Gleichheitszeichen** als Beziehung zwischen Größen/Termen in einfachen Bestimmungsgleichungen und die ganze Gleichung als Bedingung an eine unbekannte Zahl.	In $x \cdot 0{,}15 = 1{,}80$ stehen auf beiden Seite des Gleichheitszeichens die Gesamtkosten, rechts als bekannte Zahl und links als Rechnung mit unbekannter Fahrzeit. Das = sagt also aus, dass wir zu 1,80 € Gesamtkosten die passende unbekannte Minutenzahl suchen.
K3) Die Lernenden können relevante **Darstellungen wie** **a) Tabelle** und **b) Pfeilbild** **interpretieren** und mit Situationskontexten und algebraischen Darstellungen verknüpfen.	In der Tabelle fasst der Term $x \cdot 0{,}15 + 1$ alle möglichen Rechnungen in der Gesamtkosten-Spalte zusammen. Im Pfeilbild sehe ich, dass die Gleichungen $m \cdot 11 + 1 = 3{,}20$ und $m \cdot 11 = 2{,}20$ die gleiche unbekannte Zahl beschreiben – einmal mit und einmal ohne den Euro für das Entsperren (siehe Baustein C, Aufgabe 9).

Aufbau des Unterrichtsmaterials: Kompetenzentwicklung in den Bausteinen A bis D

Baustein A – Veränderliche Bilder allgemein beschreiben

Die Bausteine A und B nehmen die Deutung der Variable ins Visier, die für die Denkhandlung des *Verallgemeinerns* relevant ist: die **Variable als Veränderliche** (siehe Abb. 2). Zentral für das algebraische Verallgemeinern ist u. a. Folgendes:

- **Die Variable steht für alle möglichen Zahlen** (des betrachteten Zahlenbereichs). Es wird also keine konkrete Zahl gesucht, sondern es geht gezielt darum, immer gleiche Rechnungen mit Zahlen in einer Rechnung kompakt aufzuschreiben. Diesen Gedanken können die Lernenden in Baustein A mit Hilfe von Alltagskontexten und Mustern „nacherfinden“ und dadurch einen ersten Zugang zur Deutung der Variable als Veränderliche entwickeln (**K1a**). Hierbei ist es nicht unüblich, dass die Lernenden ihre allgemeinen Rechnungen zunächst mit Hilfe von *Wortvariablen* beschreiben, also für den Tisch-Kontext in Abb. 3 bspw. „2 + Tischzahl · 4“. Alternativ nutzen sie *generische Zahlen*: „Wenn man z. B. 15 Tische hat, dann rechnet man 2 + 15 · 4“.

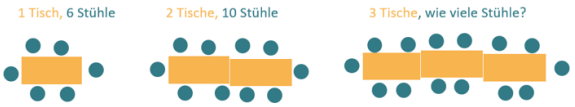
  In den Erkundungen von Baustein A ist es besonders wichtig, dass die Lernenden den *Sinn* der Nutzung der Veränderlichen erfahren können: *Wobei hilft die Variable eigentlich?* Hierbei haben sich die folgenden Erfahrungen bewährt:

  - Die Lernenden notieren sehr viele strukturgleiche Rechnungen zu einem Situationskontext (bspw. Tisch-Kontext Abb. 3) und erfahren dabei, dass die Variable diesen Schreibaufwand erheblich entlasten kann: *Veränderliche reduzieren Komplexität*.
  - Sie erfahren darüber hinaus, dass auch jede weitere denkbare Rechnung (für 47 oder 132 Tische) mit Hilfe des allgemeinen Terms ($2 + x \cdot 4$) bestimmt werden kann: *Veränderliche erlauben Verallgemeinerungen*.

- **Terme beschreiben Beziehungen zwischen Größen** (*Beziehungssichtweise auf Terme*). Sie werden also nicht nur als reine Rechenvorschriften gesehen, mit denen man Ergebnisse ausrechnen kann (*Rechnungssichtweise auf Terme*). Vielmehr beschreiben Terme in Beziehungssichtweise, wie die im Term auftauchenden Größen zueinander in Beziehung stehen: „Warum wird die Tischzahl im Tisch-Kontext (Abb. 3) eigentlich · 4 gerechnet?“ Wichtig hierbei ist also, dass die Lernenden die im Term vorkommenden Operationen im Situationskontext begründen (**K2b**), denn die Operationen drücken die *Beziehungen* zwischen den Größen mathematisch aus: „Ich rechne mal, weil an den langen Seiten jedes Tisches immer 4 Stühle stehen. Ich habe also so viel Mal 4 Stühle, wie ich Tische habe, also z. B. für 15 Tische: 15-mal 4 Stühle.“

3 Rechenvorschriften allgemein beschreiben

a) Pia hat in die Tabelle für Aufgabe **1** geschrieben, wie sie rechnet.
Wie kommt sie auf ·4?
Kannst du weitere Terme ergänzen?



Wie viele Tische?	1	2	3	...	15	16	17	...	42	x
Wie viele Stühle?	2 + 4 = 6	2 + 2·4 = 10	2 + 3·4 = 14		2 + 15·4				2 + 42·4	

Abb. 3: Aufgabe 3 (Baustein A) zum Erkunden der Variable als Veränderliche und des Terms in Beziehungssichtweise

Baustein B – Sachverhalte allgemein beschreiben mit veränderlichen Zahlen

Baustein B knüpft an die Erfahrungen der Lernenden in Baustein A an und thematisiert über die verschiedenen Aufgaben hinweg typische konzeptuelle Hürden, die beim Verständnisaufbau der Veränderlichen bekannt sind. Zudem werden Sprachmittel zur Deutung von Variable (**K1a**) und Sprachhandlungen zur Interpretation von Termen (**K2a-d**) nach und nach systematisiert.

Typischerweise stoßen Lernende beim „Nacherfinden“ der Veränderlichen auf die folgenden eng verbundenen Hürden, die sich anhand von Aufgabe 3a aus Baustein B veranschaulichen lassen:

a) Pascal und Miriam haben Fehler gemacht beim Ausfüllen der Tabelle. Erkläre ihnen, was falsch ist.

Servicepreis
E-Scooter: 0,15 € pro Minute und 1 € für's Entsperren

Tag	Fahrzeit	Fahrzeit + Minutenpreis (in €)	+ Entsperrkosten (in €)	Gesamtkosten ausgerechnet (in €)
16. Mai	20	20 · 0,15	20 · 0,15 + 1	4,00
19. Mai	12	12 · 0,15	12 · 0,15 + 1	2,80
24. Mai	27	27 · 0,15	27 · 0,15 + 1	5,05
Für jede beliebige Fahrzeit:	100	100 · 0,15	100 · 0,15 + 1	16,00

Abb. 4: Aufgabe 3a (Baustein B) mit typischen Lernenden-Fehlern bzgl. Variable und Term

- **Hürde 1: Terme werden nur als Abfolge von Rechnungen gesehen und nicht als Beziehungen zwischen Größen**. Terme werden also nur zum Ausrechnen genutzt und nicht, um ein Muster oder einen Zusammenhang zu beschreiben. In Abb. 4 erkennt man dies gut daran, dass die auftauchenden Größen nicht (das + in Spalte 3 als „und“ gelesen) bzw. falsch (das + in Spalte 3 als Addition gelesen) in Beziehung gesetzt werden. Zudem ist es recht typisch, dass die Lernenden (wie in Spalte 4) lediglich notieren, welche Größe in der Spalte „neu dazukommt“. Hieran wird deutlich, dass die Lernenden den Term als Abfolge von Rechnungen denken und noch nicht als Beschreibungsmittel für Beziehungen. Um die Lernenden dabei zu unterstützen, sich von der *Rechnungssichtweise auf Terme* zu lösen und die *Beziehungssichtweise* aufzubauen, ist es nötig, dass sie
  - nicht nur die im Term auftauchenden Größen inhaltlich deuten (**K2a**), sondern vor allem auch die Beziehungen zwischen den Größen, also die auftauchenden Operationen begründen (**K2b**);
  - auch (Teil-)Terme als eine einheitliche Größe beschreiben (**K2c**), also bspw. 20 · 0,15 in Aufgabe 3a als die Kosten für die reine Fahrzeit (ohne Entsperren).

Das Interpretieren von Termen ist also eine mehrschrittige Sprachhandlung bestehend aus der Deutung der auftauchenden Größen und Variablen, der Deutung der Operationen und der Deutung der (Teil-)Terme als *einer* Größe. Diese komplexe Sprachhandlung wird im Material durch eine explizite Abfolge von Erläuterungsschritten unterstützt und soll zur „Ritualisierung“ einladen (siehe Abb. 5).

So erklärt man, was ein Term mit Variablen bedeutet:

Erklären zu 3 Fragen:
1. Wofür stehen die Variablen?
2. Warum nimmst du diese Rechenarten?
3. Was beschreibt der Term genau?

Beispiel: 1,5 + x · 0,8
Die Variable x steht für …
Bei x · 0,8 rechne ich · , weil …
Bei 1,5 + x · 0,8 rechne ich + , weil …
Der Term 1,5 + x · 0,8 insgesamt steht für …

Abb. 5: Unterstützungsaufgabe für die mehrschrittige Sprachhandlung des Interpretierens von Termen (Speicherkiste B)

- **Hürde 2: Die Variable wird als Stellvertreter für irgendeine konkrete Zahl gedacht und nicht als Bezeichnung für alle möglichen Zahlen**. Häufig interpretieren Lernende die Aufforderung zur Verallgemeinerung von Mustern so, dass sie das Muster für „irgendeine“ (große) Zahl beschreiben sollen, bspw. in Abb. 4 für 100 min Fahrzeit. Die Lernenden sprechen dann häufig davon, dass sie sich „einfach irgendeine Zahl aussuchen können“ oder dass „es egal ist, welche Zahl sie nehmen“. Das Verallgemeinern ist also für diese Lernenden noch immer an *eine konkrete* Zahl gebunden – auch wenn ihnen dabei klar ist, dass sie *irgendeine* Zahl nehmen können.

  Dieses Phänomen verschwindet nicht zwingend, wenn Lernende Buchstaben nutzen, um Verallgemeinerungen zu beschreiben. Auch dann kann es sein, dass sie den Buchstaben immer noch als einen Stellvertreter für irgendeine konkrete (große) Zahl denken. Das konzeptuelle Problem an dieser Vorstellung ist, dass sich für die Lernenden häufig Variablenterme wie $x \cdot 0{,}15 + 1$ „unfertig anfühlen“. Die Lernenden haben dann das Bedürfnis, früher oder später für x eine konkrete Zahl einzusetzen und ein Ergebnis auszurechnen; sie denken also immer $x \cdot 0{,}15 + 1 = \ldots$.

  Die Lernenden stellen sich also häufig die Variable zunächst als *nur vorübergehend unbestimmte Zahl* vor. Um sie bei der Ablösung von dieser Vorstellung zu unterstützen, sollten die Lernenden die Allgemeingültigkeit von Termen inhaltlich begründen (**K2d**). Denn hierbei müssen sie Formulierungen finden, mit denen sie sich von einer konkreten Zahl ablösen. So könnte eine Antwort auf Farids Frage in Abb. 6 etwa lauten: „Für *alle möglichen* Minutenanzahlen, die ich *jemals* fahren könnte, muss ich *immer* für jede dieser Minuten einmal den Minutenpreis bezahlen. Für 1042 min ist es also auch 1042-mal der Minutenpreis, denn am Minutenpreis ändert sich ja nichts.“

  Die Ablösung von der Vorstellung der Variable als *nur vorübergehend unbestimmte Zahl* kann zudem durch Darstellungsvernetzung mit Hilfe der Tabelle angeregt werden (**K3a**): In dem x stecken alle möglichen Fahrzeiten, die ich jemals in die Fahrzeiten-Spalte schreiben könnte (siehe Abb. 1).

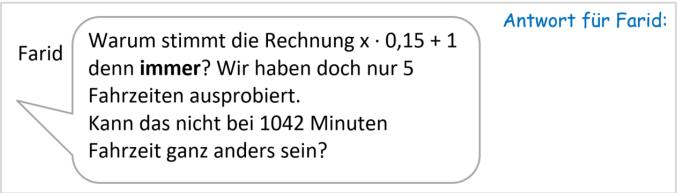


Abb. 6: Aufgabe 3b (Baustein B), in der die inhaltliche Begründung der Allgemeingültigkeit eines Terms eingefordert wird

Baustein C – Unbekannte Größen bestimmen

Während die Bausteine A und B die Deutung der Variable als Veränderliche ausgehend von der Denkhandlung des Verallgemeinerns fokussieren, wird in Baustein C eine andere Deutung der Variable thematisiert: die **Variable als Unbekannte** (**K1b**). Diese Variablen-Deutung bezieht ihren Sinn aus der Denkhandlung des *Ermittelns unbekannter Größen*. Aus diesem Grund wird in Baustein C das informelle Lösen einfacher linearer Gleichungen betrachtet. Hierbei wird das Finden immer einfacherer Gleichungen über das Rückwärtsrechnen motiviert, dargestellt durch Pfeilbilder:

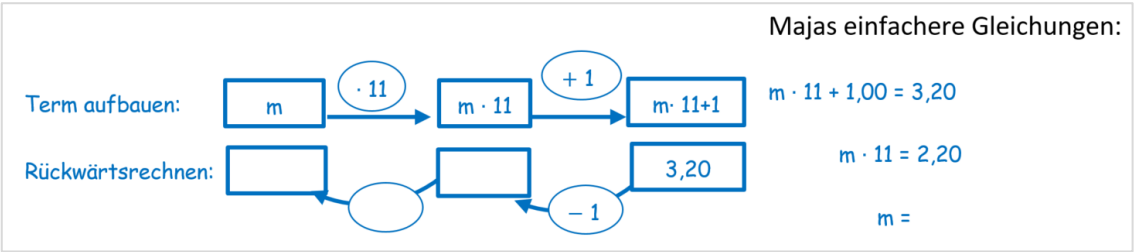


Abb. 7: Aufgabe 9 (Baustein C), in der Rückwärtsrechnen und das Aufstellen einfacherer Gleichungen verknüpft werden

Damit die algebraischen Umformungen der Gleichung bedeutungsvoll sind, müssen sie intensiv mit dem Pfeilbild und dem Situationskontext vernetzt werden (**K3b**). Daher fordern die Arbeitsaufträge im Material immer wieder dazu auf, die verschiedenen Darstellungen (Situation, Gleichungen und Pfeilbild) sprachlich zu vernetzen, z. B. „Die Gleichung $m \cdot 11 = 2{,}20$ beschreibt die gleiche unbekannte Zahl m wie $m \cdot 11 + 1 = 3{,}20$. Denn man rechnet beim Term-Aufbauen als letztes +1 für den Euro für's Entsperren und das wurde in $m \cdot 11 = 2{,}20$ rückgängig gemacht. Weil man im Term +1 für's Entsperren weglässt, muss man den Euro auch von den 3,20 € Gesamtkosten abziehen."

Um diese intensiven Darstellungsvernetzungen beim Lösen von Gleichungen meistern zu können, ist es notwendig, dass die Lernenden hinreichend Erfahrungen beim Interpretieren von Termen und Gleichungen sammeln konnten (**K2a-e**). Hierfür wird die in Baustein B eingeführte mehrschrittige Sprachhandlung des Interpretierens von Termen um einen weiteren Schritt ergänzt: die Deutung des Gleichheitszeichens (**K2e**). Man drückt z. B. mit dem Gleichheitszeichen zwischen dem Term $m \cdot 11 + 1$ und der Zahl 3,20 aus, dass wir wissen wollen, mit welchem unbekannten Minutenpreis wir insgesamt 3,20 € bezahlen müssen.

c) Maja will den Fahrpreis pro Minute (**Minutenpreis**) von Anbieter A wissen. Dazu schreibt sie eine Gleichung auf: $m \cdot 11 + 1{,}00 = 3{,}20$. Erkläre, was Majas Gleichung bedeutet:

1. Der Term / die Zahl rechts vom Gleichheitszeichen steht für ...

2. Das m steht in Majas Gleichung für....

3. Der Term links vom Gleichheitszeichen steht für....

4. Man schreibt zwischen die Terme/Zahlen ein Gleichheitszeichen, um auszudrücken....

Abb. 8: Aufgabe 8c (Baustein C) zur Unterstützung der mehrschrittigen Sprachhandlung des Interpretierens von Gleichungen

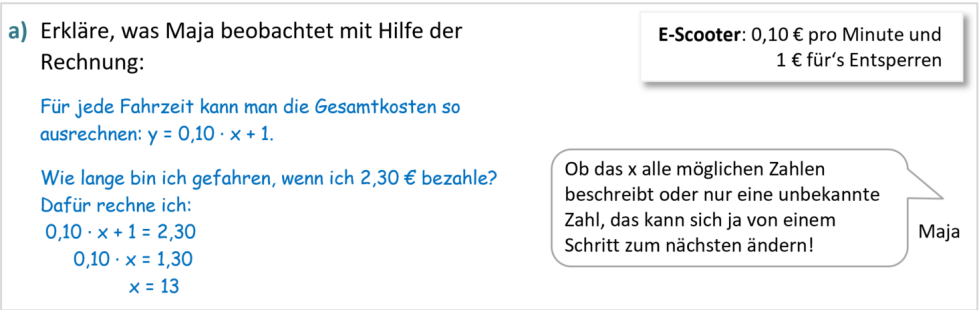
Baustein D – Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden

Beim Verallgemeinern und beim Ermitteln unbekannter Größen erfüllt die Variable jeweils einen ganz unterschiedlichen Sinn und Zweck:

- Der *Sinn der Veränderlichen* besteht darin, einen Zusammenhang möglichst allgemein zu beschreiben. Es geht also gerade darum, von den konkreten (veränderlichen) Zahlen zu abstrahieren, um eine allgemeine Struktur zu erkennen bzw. einen allgemeinen Term. Terme wie $x \cdot 0{,}15 + 1$ und allgemeine Gleichungen wie $y = x \cdot 0{,}15 + 1$ sind „fertig" und „an sich wertvoll", weil sie einen Zusammenhang allgemein beschreiben. Bei der Veränderlichen gibt es also *nichts weiter zu wissen oder herauszufinden.*
- Hingegen besteht der *Sinn der Unbekannten* darin anzuzeigen, dass eine Zahl gesucht werden soll. Mit einer Bestimmungsgleichung wie $x \cdot 0{,}15 + 1 = 3{,}20$ ist man gerade nicht „fertig", sondern es gibt noch etwas zu tun, nämlich die gesuchte unbekannte Zahl zu finden. Die Unbekannte zeigt also an, *dass man etwas noch nicht weiß, aber herausfinden will.*

Veränderliche und Unbekannte haben also nicht nur eine unterschiedliche Bedeutung (alle möglichen Zahlen vs. die gesuchte Zahl), sondern auch einen unterschiedlichen Sinn (etwas verallgemeinern vs. etwas Unbekanntes herausfinden). Ein tiefes Verständnis der Bedeutung der Variable erfordert, dass die Lernenden den jeweiligen Sinn aus dem die Variable ihre Bedeutung bezieht erfahren können (alle möglichen Zahlen, um zu verallgemeinern, vs. die gesuchte Zahl, um etwas herzufinden). Hierfür haben sich folgende Maßnahmen als äußerst wertvoll erwiesen (**K1c**):

- **Wechsel zwischen Variablen-Deutungen explizit zum Thema machen**: Hierin besteht das Hauptanliegen des gesamten Bausteins D. Die unterschiedlichen sinnstiftenden Erfahrungen der Bausteine A bis C werden hier noch einmal aufgegriffen und gegenübergestellt. Hierbei geht es nicht nur darum, die Variablen-Deutungen einander gegenüberzustellen (siehe die Kernaufgabe 12 in Baustein D), sondern auch über den *Wechsel* zwischen den Deutungen ins Gespräch zu kommen:


a) Erkläre, was Maja beobachtet mit Hilfe der Rechnung:

Für jede Fahrzeit kann man die Gesamtkosten so ausrechnen: $y = 0{,}10 \cdot x + 1$.

Wie lange bin ich gefahren, wenn ich 2,30 € bezahle?
Dafür rechne ich:
$0{,}10 \cdot x + 1 = 2{,}30$
$0{,}10 \cdot x = 1{,}30$
$x = 13$

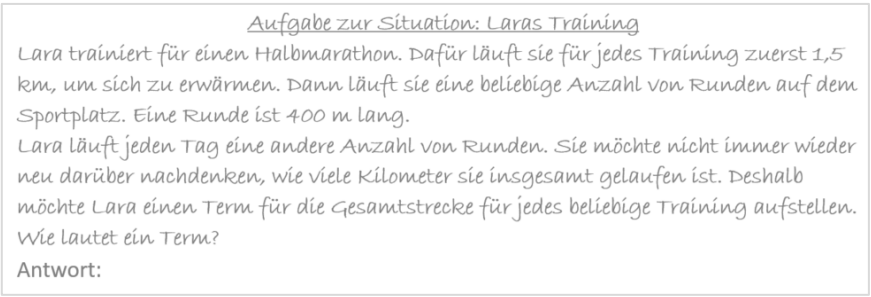
E-Scooter: 0,10 € pro Minute und 1 € für's Entsperren

Ob das x alle möglichen Zahlen beschreibt oder nur eine unbekannte Zahl, das kann sich ja von einem Schritt zum nächsten ändern!
Maja

Abb. 9: Aufgabe 13a (Baustein D), in der der Wechsel zwischen Veränderlicher und Unbekannter explizit thematisiert wird

- **Unterscheiden der Bedeutung der Variablen-Deutungen durch Gegenüberstellung von Sprachmitteln**: Um die unterschiedlichen Bedeutungen der Variable (alle möglichen Zahlen vs. die gesuchte Zahl) mit den Lernenden zu kontrastieren, werden im Material wichtige bedeutungsbezogene Sprachmittel miteinander verglichen (siehe Aufgabe 12c in Baustein D).
- **Unterscheiden des Sinns der Variablen-Deutungen mit Hilfe kleiner Geschichten**: Die Unterscheidung des unterschiedlichen Sinns der beiden Variablen-Deutungen (etwas verallgemeinern vs. etwas Unbekanntes herausfinden) ist zunächst recht abstrakt und häufig für die Lernenden sprachlich nicht leicht zu greifen. Es hat sich allerdings gezeigt, dass man mit den Lernenden hierüber gut ins Gespräch kommen kann, indem man kleine Geschichte hin zur jeweils anderen Variablen-Deutung verändert oder zu beiden Variablen-Deutungen Variationen der gleichen Geschichte erzählen lässt (siehe Aufgabe 13b in Baustein D):

  In der Geschichte Laras Training (Abb. 10) wird der Sinn der Veränderlichen dadurch erkennbar, dass *Lara nicht immer wieder neu darüber nachdenken möchte*, wie viele Kilometer sie gelaufen ist. Die Variable hilft ihr also Komplexität zu reduzieren. Für eine Variation der Geschichte, die die Variable als Unbekannte ins Zentrum rückt, müssen die Lernenden auch den Sinn der Unbekannten thematisieren: „*Lara möchte heute insgesamt 4,3 km laufen*, weil ihr Traningsplan das vorschreibt. Wie viele Runden muss sie auf dem Sportplatz laufen?"


Aufgabe zur Situation: Laras Training

Lara trainiert für einen Halbmarathon. Dafür läuft sie für jedes Training zuerst 1,5 km, um sich zu erwärmen. Dann läuft sie eine beliebige Anzahl von Runden auf dem Sportplatz. Eine Runde ist 400 m lang.
Lara läuft jeden Tag eine andere Anzahl von Runden. Sie möchte nicht immer wieder neu darüber nachdenken, wie viele Kilometer sie insgesamt gelaufen ist. Deshalb möchte Lara einen Term für die Gesamtstrecke für jedes beliebige Training aufstellen.
Wie lautet ein Term?
Antwort:

Abb. 10: Geschichte, in der der Sinn der Veränderlichen deutlich wird (Baustein D, Aufgabe 12c)

Zentrale Sprachhandlungen im Unterrichtsmaterial: Erklären von Bedeutung und Erklären der Unterschiede von Bedeutungen

Variablen, Terme und Gleichungen sind abstrakte mathematische Gegenstände. Umso wichtiger ist es, dass die Lernenden eine *bedeutungsbezogene Denksprache* haben, mit der sie sich diese abstrakten Gegenstände zugänglich machen können. Für den Aufbau einer solchen Denksprache verfolgt das Material folgende Ziele:

- **Erklären von Bedeutung der Variable in ihren verschiedenen Deutungen**: Die Denkhandlungen, aus denen die Variable ihre verschiedenen Deutungen bezieht, müssen für die Lernenden sehr abstrakt bleiben, wenn sie das Denken nicht durch passende Sprachhandlungen ausdrücken können (siehe Abb. 11). Aus diesem Grund wird im Material immer wieder durch Erklärаufträge *Sprache eingefordert*, um den Lernenden die verschiedenen Denkhandlungen zugänglich zu machen. Die *Sprache* der Lernenden wird *unterstützt* durch den Aufbau eines gemeinsamen Denkwortschatzes mit Hilfe bedeutungstragender Sprachmittel (siehe die rechte Spalte von Abb. 11 für einzelne Bsp.).

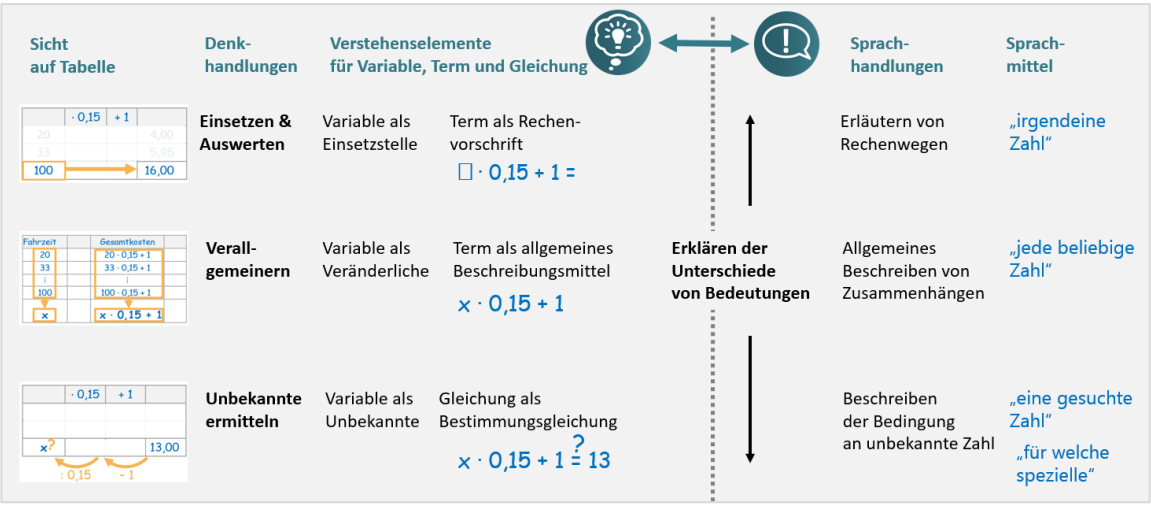


Abb. 11: Sprachhandlungen und Sprachmittel zu den Deutungen der Variable

- **Erklären der Unterschiede von Bedeutungen der Variable**: Auch die besten Sprachmittel bleiben Worthülsen, wenn sie nicht in den relevanten Erfahrungen verwurzelt sind. Für die Variablen-Deutungen zentral ist die Erfahrung, dass Variablen einen unterschiedlichen Sinn haben (etwas ausrechnen vs. etwas verallgemeinern vs. etwas Unbekanntes herausfinden). Aus diesem Grund ist das Erklären der Unterschiede der Variablen-Deutungen so wichtig. Die Unterschiede können ausgeschärft werden durch eine Gegenüberstellung der Sprachmittel und eine Variation kleiner Geschichten (siehe Abb. 10).
- **Erklären der Bedeutung von Termen und Gleichungen**: Variablen stehen in der Regel nicht allein, sondern sind eingebunden in Terme und Gleichungen. So können Sinn und Bedeutung der Variable auch erst im Zusammenhang mit Termen und Gleichungen erfasst werden. Aus diesem Grund ist es unerlässlich, dass die Lernenden auch das Interpretieren von Termen und Gleichungen lernen. Hierfür werden die mehrschrittigen Sprachhandlungen im Material in typische Schritte aufgeteilt (siehe Abb. 5 und 8) und damit die komplexen Sprachhandlungen ritualisiert.

Überblick: Fachliche und sprachliche Anforderungen des Themenfelds

Fachliches (Teil-)Lernziel	Sprachhandlung und dazu notwendige Sprachmittel *(wichtigste Satzbausteine sind kursiv dargestellt)*
K1) Variablen situationsangemessen deuten, Deutungen kontrastieren	**Erklären der Bedeutung der Variable**
a) deuten Variable als Veränderliche	• Die Variable steht für *jede beliebige Zahl*/*alle möglichen Zahlen*. • Mit der Gleichung/dem Term beschreibe ich den Gesamtpreis ganz *allgemein* für *jede nur denkbare* Zahl. • Mit der Rechnung *habe* ich *alle* Gesamtpreise *beschrieben* – egal wie viele Minuten ich fahre.
b) deuten Variable als Unbekannte	• Die Variable steht für *eine unbekannte Zahl*/*die versteckte Zahl*/*die gesuchten Zahlen*. • Mit der Gleichung *suche* ich *eine feste Zahl*. • Ich *weiß noch nicht*, für welche Zahl die Variable steht. • Ich *will* die Variable *herausfinden*.
c) unterscheiden Veränderliche und Unbekannte explizit voneinander	**Erklären der Unterschiede von Bedeutungen der Variable** • Mit der Unbekannten suche ich ganz bestimmte/konkrete Zahlen, *während* die Veränderliche für alle Zahlen steht. • Mit der Veränderlichen kann man alle Rechnungen auf einmal beschreiben. *Demgegenüber* sucht man mit der Unbekannten nach festen Zahlen, die versteckt sind. • In einfachen Gleichungen steht die Unbekannte für eine feste/bestimmte Zahl. *Hingegen* steht die Veränderliche immer für alle verschiedenen Zahlen.
K2) Terme/Gleichungen als Beziehungen deuten	**Erklären der Bedeutung von Termen und Gleichungen**
a) deuten der vorkommenden Zahlen/Größen, Variablen	• Die 1 *steht für* die Entsperrkosten. • 0,15 € *bezeichnet* den Minutenpreis.
b) begründen der vorkommenden Operationen	• Ich rechne im Term 7 · 0,15 mal, *weil* jede Minute 0,15 € kostet und Till 7 min fährt. Man hat *also* 7-*mal* den Preis für eine Minute, *also* 7 · 0,15.
c) deuten von komplexen Teiltermen als eine Größe	• Der Term x · 0,15 *steht insgesamt* für die reine Fahrzeit ohne Entsperren. [Anmerkung: x Minuten; 0,15 € pro Minute] • Die Rechnung x · 0,15 + 1 *drückt* den Gesamtpreis *aus*.
d) argumentieren inhaltlich für die Allgemeingültigkeit von Termen	• *Egal wie lange* ich fahre, ich *muss* ja *immer* 0,15 € pro Minute bezahlen. Man bezahlt *also immer* so oft 0,15 € wie man Minuten fährt, also Minutenzahl mal 0,15.
e) deuten das Gleichheitszeichen als Beziehung zwischen Termen/Größen	• Man schreibt x · 0,15 + 1 = 2,80, weil man *wissen will*, wie lange man für 2,80 € fahren kann. • Mit dem = *fragt man*, wie viele Minuten man für einen Gesamtpreis von 2,80 € fahren kann. • Das = sagt, *dass* der Gesamtpreis 2,80 € *ist* und jetzt *soll* man *herausfinden*, für wie viele Minuten der Gesamtpreis so viel ist.
K3) Interpretieren **a) Tabelle und** **b) Pfeilbild** **als Darstellung und verknüpfen sie mit Situation und algebraischer Darstellung**	**Beschreiben der Beziehungen zwischen Darstellungen** • In der Tabelle *fasst* der Term alle möglichen Rechnungen in der Gesamtkosten-Spalte *zusammen*. • [x · 0,15 + 1 = 2,80] Um den Minutenpreis x auszurechnen, *mache ich die Rechnung rückgängig*: *Also* rechne ich zuerst minus die Entsperrkosten, also -1. • Die Gleichung x · 0,15 = 1,80 stimmt *somit* auch, *weil* man vom Gesamtpreis den Euro für's Entsperren abgezogen hat. Unbekannte Minutenzahl mal Minutenpreis ergibt die 1,80 € für die reine Fahrzeit. Man fragt mit dem = *also*, wie viele Male muss ich 0,15 € bezahlen, um auf 1,80 € zu kommen. Genau 12-mal, also x = 12.

Die Rolle von Erklärvideos und Tabellenkalkulation im Unterrichtsmaterial

Erklärvideos werden in diesem Unterrichtsmaterial genutzt, um die Systematisierungsprozesse der Lernenden zu unterstützen. Die Lernenden bekommen also stets die Möglichkeit, sich erst selbst in einen Lernkontext einzudenken (Aktivierung von Vorwissen), bevor sie mit einem Video arbeiten. Die Videos haben dann die Funktion, *offene Fragen* der Lernenden zu *beantworten, Missverständnisse zu adressieren, Überlegungen* der Lernenden *abstrakter und allgemeiner zu formulieren* und *zu ordnen*. Darüber hinaus dienen die Videos auch als *Sprachvorbilder*, die unterschiedliche bedeutungsbezogene Sprachmittel anbieten. Damit die Lernenden das jeweilige Video „mit wachem Geist" (kognitive Aktivierung) verarbeiten, wurden die Videos z. T. interaktiv gestaltet bzw. finden sich im Unterrichtsmaterial nachbereitende Aufgaben, die die Auseinandersetzung mit dem entsprechenden Video vertiefen sollen.

Tabellenkalkulation wird in dem Unterrichtsmaterial genutzt, um für die Lernenden die Kraft allgemeiner Beschreibungen erfahrbar zu machen: „Man muss nur einmal nachdenken und dann rechnet das Programm alles für mich!" Diese Erfahrung ist wichtig, um für die Lernenden den Sinn der Verallgemeinerungstätigkeiten greifbar zu machen, dessen Erfahrung wiederum für das Verständnis der Variable als Veränderlicher unerlässlich ist.

Literatur zum Weiterlesen

Barzel, B., Glade, M. & Klinger, M. (2021). *Algebra und Funktionen. Fachlich und fachdidaktisch*. Springer Spektrum. doi.org/10.1007/978-3-662-61393-1

Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. *mathematik lehren 169*, 2–7.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül: Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I* (S. 213–234). Beltz.

Prediger, S. (2020). Variable, Terme, Formeln und Gleichungen in Klasse 7-9. In S. Prediger (Hrsg.), *Sprachbildender Mathematikunterricht – Ein forschungsbasiertes Praxisbuch* (S. 162–166). Cornelsen.

Unterrichtsfilm zum Material

Zu diesem Unterrichtsmaterial wurde ein 25-minütiger Film erstellt, in dem die didaktischen Absichten und mögliche Umsetzungen im Unterricht vorgestellt werden: https://sima.dzlm.de/filme/unterrichtsfilm-variable (nach einmaliger Registrierung zugänglich)

Forschungsliteratur zum Thema

Bardini, C., Radford, L. & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of PME* (Vol. 2, pp. 129–136). PME.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11–49). Sense.

Korntreff, S. & Prediger, S. (2022a). Students' ideas about variables as generalizers and unknowns: Design research calling for more explicit comparisons of purposes. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of twelfth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. University of Bolzano / ERME. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03745135

Korntreff, S. & Prediger, S. (2022b). Verstehensqualität von YouTube-Erklärvideos – Konzeptualisierung und Analyse am Beispiel algebraischer Konzepte. *Journal für Mathematikdidaktik 43*(2), 281–310. doi:10.1007/s13138-021-00190-7

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg+Teubner.

Prediger, S. & Krägeloh, N. (2016). "X-arbitrary means any number, but you do not know which one": the epistemic role of languages while constructing meaning for the variable as generalizers. In A. Halai & P. Clarkson (Eds.), *Teaching and learning mathematics in multilingual classrooms* (pp. 89–108). Sense.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford (Eds.), *Yearbook 1988. The ideas of algebra, K-12* (pp. 8–19). National Council of Teachers of Mathematics.

Warren, E., Trigueros, M. & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 73–108). Sense.

Struktur des Unterrichtsmaterials im Überblick

Teil	Thema	Kompetenz Fachlich	Sprachlich	Kern-aufgaben
A	**Veränderliche Bilder allgemein beschreiben**	**K1a)** Variable deuten als Veränderliche	Erklären der Bedeutung der Variable als Veränderliche	3, 4
		K2) Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. **a)** deuten der Größen, Variablen, **b)** Operationen	Erklären der Bedeutung von Termen	1-4
B	**Sachverhalte allgemein beschreiben mit veränderlichen Zahlen**	**K1a)** Variable deuten als Veränderliche	Erklären der Bedeutung der Variable als Veränderliche	1-3, 5
		K2) Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten **a)** der Größen, Variablen, **b)** Operationen, **c)** Teilterme als einer Größe,	Erklären der Bedeutung von Termen	1-5
		d) für die Allgemeingültigkeit von Termen inhaltlich argumentieren	Begründen der Allgemeingültigkeit von Termen	3, 5
		K3a) Interpretieren der Tabelle und Verknüpfung mit Situation und algebraischer Darstellung	Beschreiben der Beziehungen zwischen Darstellungen	1-3, 5
C	**Unbekannte Größen bestimmen**	**K1b)** Variable deuten als Unbekannte	Erklären der Bedeutung der Variable als Unbekannte	8, 9
		K2) Gleichungen deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. **a)** deuten der Größen, Variablen, **b)** Operationen, **c)** Teilterme als einer Größe, **e)** des Gleichheitszeichens	Erklären der Bedeutung von Gleichungen	8
		K3b) Interpretieren des Pfeilbilds und Verknüpfung mit Situation und algebraischer Darstellung	Beschreiben der Beziehungen zwischen Darstellungen	9
D	**Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden**	**K1)** Variable deuten als **a)** Veränderliche, **b)** Unbekannte	Erklären der Bedeutung der Variable als Unbekannte bzw. Veränderliche	12, 13
		K1c) Veränderliche und Unbekannte explizit unterscheiden	Erklären der Unterschiede von Bedeutungen der Variable	12, 13
		K2) Gleichungen deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. **a)** deuten der Größen, Variablen, **b)** Operationen, **c)** Teilterme als einer Größe, **e)** des Gleichheitszeichens	Erklären der Bedeutung von Termen und Gleichungen	13

Lösungsvorschläge und Hinweise zu den Aufgaben des Unterrichtsmaterials

Baustein A – Aufgabe 1

Kompetenz: **K2)** Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen

Hinweise: Damit Lernende die Buchstabenvariable später mit Bedeutung füllen können, müssen sie vorher Erfahrungen des Verallgemeinerns machen. Intuitive Beschreibungen des Verallgemeinerns mit Hilfe von Wortvariablen (Tischzahl) oder großen Beispielzahlen (42, 102) sind daher erwünscht. Wichtig ist, dass die Lernenden auch die Beziehungen zwischen der Größen in der Termen erklären, insbesondere die Multiplikation.

Impulse: Warum muss man hier eigentlich Mal rechnen? Erklärt mal.
Erläutert. wie die Rechnung für 102 Tische aussehen würde?

Lösungs-vorschlag:

A Veränderliche Bilder allgemein beschreiben

1 Immer mehr Tische, immer mehr Stühle

a) Die Özdemirs sind eine sehr gastfreundliche Familie. Egal, wie viel Freunde und Verwandte noch spontan vorbeikommen, immer stellen sie einfach noch Tische und Stühle dazu. Im großen Garten geht das immer weiter.

- Wie viel Stühle braucht man für 3 Tische, für 4 Tische?
- Wie viel Stühle braucht man für 8 Tische? Wie kannst du das ermitteln ohne Zeichnen?
- Wie viel Stühle braucht man für 42 Tische? Wie kannst du das ermitteln ohne Zeichnen?

Anzahl der Tische	1	2	3	4	5	6	7	8	...	42
Anzahl der Stühle	6	10	14	18	22	26	30	34		170

b) Was meint Merve mit ihrer Aussage?
Wie viel Stühle sind es dann bei 17 Tischen?

Merve: 2 vor Kopf und pro Tisch ein 4er-Set an Stühlen.

An jedem Tisch sitzen immer 4 Personen („pro Tisch ein 4er-Set von Stühlen"). Außer am ersten und letzten Tisch, da sitzen an der kurzen Tischseite noch je eine Person („2 vor Kopf"). Bei 17 Tischen hat man 17 4er-Gruppen von Stühlen und dann noch die 2 am Anfang und Ende der langen Tafel dazu, also 17-mal die 4 Stühle an einem Tisch und 2 Stühle dazu, $17 \cdot 4 + 2$.

c) Schreibe eine Rechenvorschrift auf, wie man die Zahl der Stühle ausrechnet, wenn man die Zahl der Tische kennt.

Tischzahl mal 4 Stühle (für die 4er-Gruppen) und dann 2 dazu am Anfang und Ende der Tafel: Tischzahl $\cdot$ 4 + 2

Baustein A – Aufgabe 2

Kompetenz: **K2)** Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen

Hinweise: Siehe Baustein A – Aufgabe 1

Impulse: Siehe Baustein A – Aufgabe 1

Lösungs-vorschlag:

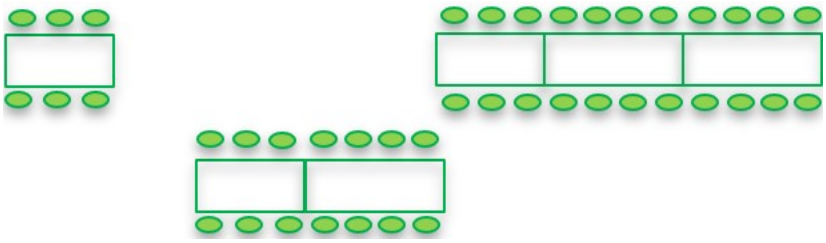
2 Andere Tisch-Ordnung

a) Svetlana berichtet von einer anderen Tischordnung bei ihren Festen.

An jeden Tisch passen 8, nur an den 1. Tisch, da passen nur zwei weniger dran.

- Zeichnen Sie die Tischordnung.

1 Tisch, wie viele Stühle? 2 Tische, wie viele Stühle? 3 Tische, wie viele Stühle?



- Bei kleinen Festen sind es nur 3 Tische. Wie viele Stühlen werden gebraucht?
- Bei großen Festen sind es 16, 17 oder sogar 22 Tische. Wie viel Stühle werden jeweils gebraucht?

Anzahl der Tische	1	2	3	4	5	16	17	22	...	42
Anzahl der Stühle	6	14	22	30	38	126	134	174		334

b) Schreibe eine Rechenvorschrift auf, wie man die Anzahl der Stühle ausrechnet, wenn man die Zahl der Tische kennt. So eine Rechenvorschrift nennt man auch Term.

Man muss die Anzahl der Tische minus 1 rechnen. Das sind die Tische, an die jeweils 8 Stühle passen. An den ersten Tisch passen nur 6 Stühle. Also muss man die Tischanzahl minus 1 (der erste Tisch ist anders) mit 8 multiplizieren und die 6 Stühle vom ersten Tisch addieren. oder

Man muss die Tischanzahl mal 8 rechnen und die 2 Stühle, die zu viel sind, abziehen.

c) Wie viele Stühle braucht man für jede x-beliebige Zahl von Tischen?
Wie lässt sich dafür eine Rechenvorschrift aufschreiben?

(Tischanzahl insgesamt – 1) · 8 + 6 bzw. (t – 1) · 8 + 6 oder

Tischanzahl · 8 – 2 bzw. t · 8 – 2

Baustein A – Aufgabe 3

Kompetenz: **K1a)** Variable deuten als Veränderliche
K2) Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen

Hinweise: Sollen Buchstabenvariablen einen Sinn haben, müssen sie als nützliches Hilfsmittel erfahrbar werden. Hier erlaubt der Buchstabe *alle möglichen* Tischanzahlen zu beschreiben. Lernende werden zunächst den Buchstaben als Einsetzstelle deuten, für die man sich *irgendeine* Tischahl aussuchen kann. Hier kann bereits behutsam an der Vorstellung gearbeitet werden, dass die Variable so toll ist, weil sie *alle möglichen/jede beliebige* Zahlen beschreiben kann und man nicht endlos Tabellenspalten aufschreiben muss.

Impulse: Erklärt mal, warum ist es vllt. ganz praktisch, was die Pia sich da mit dem x überlegt hat. Was ist der Vorteil, wenn man die Rechnung mit x aufschreibt?

Lösungsvorschlag:

3 Rechenvorschriften allgemein beschreiben

a) Pia hat in die Tabelle für Aufgabe **1** geschrieben, wie sie rechnet.
Wie kommt sie auf ·4?
Kannst du weitere Terme ergänzen?

Wie viele Tische?	1	2	3	...	15	16	17	...	42	x
Wie viele Stühle?	2 + 4 = 6	2 + 2·4 = 10	2 + 3·4 = 14		2 + 15·4 = 62	2+16·4 = 66	2+17·4 = 70		2 + 42·4 = 170	2+x·4

b) Was meint Pia in der letzten Spalte mit dem x? Wie könnte der Term zu dem x heißen?

x kann als Einsetzstelle gedeutet werden: *„Für x kann man sich eine Tischanzahl ausdenken"; „Für x kann ich egal welche Tischanzahl nehmen"; „x steht für irgendeine Tischanzahl"*

x kann als Veränderliche gedeutet werden: *„x steht für jede Tischanzahl, die man in den Garten stellen kann."; „x kann alle Zahlen sein, 3 oder 4 Tische oder 100 oder 1048, einfach alle, die man sich ausdenken kann"*

c) Auch für Aufgabe **2** hat Pia in die Tabelle angefangen, Terme zu schreiben.

An jeden Tisch passen 8, nur der 1. Tisch ist kleiner, da passen 2 weniger dran.

- Wie kommt sie auf -2? Und wie auf ·8? Zeige das in deinem Bild.

Wie viel Tische?	1	2	3	4	15	16	17	..	42	x
Wie viel Stühle?	8 – 2 = 6	2·8 -2 = 14	3·8 -2 = 22	4·8–2 = 30	15·8–2 = 118	16·8–2 = 126	17·8–2 = 134		42·8–2 = 334	x·8–2

d)
- Fülle die Tabelle.
- Erkläre auch hier, was „jede x-beliebige Tisch-Anzahl" bedeutet?
- Wie könnte der Term heißen?

x kann als Einsetzstelle gedeutet werden: *„Für x kann man sich eine Tischanzahl ausdenken"; „Für x kann ich egal welche Tischanzahl nehmen"; „x steht für irgendeine Tischanzahl"*

x kann als Veränderliche gedeutet werden: *„x steht für jede Tischanzahl, die man in den Garten stellen kann."; „x kann alle Zahlen sein, 3 oder 4 Tische oder 100 oder 1048, einfach alle, die man sich ausdenken kann"*

Baustein A – Aufgabe 4

Kompetenz: **K1a)** Variable deuten als Veränderliche
K2) Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen

Hinweise: Siehe Baustein A – Aufgabe 3

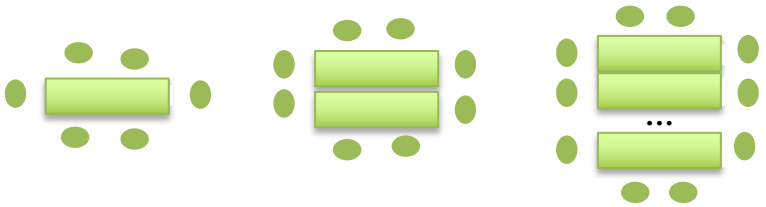
Impulse: Siehe Baustein A – Aufgabe 3

Lösungs-vorschlag:

4 Terme mit x verstehen

a) Pia hat wieder einen Term mit x aufgeschrieben.
- Fülle die Tabelle, indem du statt dem x Beispielterme mit Zahlen aufschreibst. Man nennt x daher auch veränderliche Zahl.
- Zeichne die Tischanordnung, die zu diesem Term gehört.

Anzahl der Tische	1	2	3	4	...	15	16	...	42	x
Anzahl der Stühle	2·1+4	2·2+4	2·3+4	2·4+4		2·15+4	2·16+4		2·42+4	2 · x + 4



b) Versuche nun, den Term 2 · x + 4 zu erklären:
- Im Term wird x mit 2 multipliziert. Wo kann man in der Tabelle die 2 aus dem Term finden?

Die 2 wird immer mit der Tischanzahl multipliziert, da es pro Tisch immer zwei Stühle gibt (auf den beiden kurzen Seiten des Tisches zusammen).

- Was bedeutet das x im Term? Kann man das auch anders ausdrücken?

x kann als Einsetzstelle gedeutet werden: *eine Anzahl von Tischen, die ich mir aussuchen kann; irgendeine Tischanzahl, die mir einfällt*

x kann als Veränderliche gedeutet werden: *alle möglichen Anzahlen von Tischen; jede Anzahl von Tischen, die man sich ausdenken kann*

- Was kann man mit dem Term berechnen? Erkläre an der Tabelle.

Die Zahl in der oberen Zeile gibt die Anzahl der Tische an. Mit dem Term können wir dann in der zweiten Zeile die Anzahl der Stühle berechnen, die an die Tische passen. Das Ergebnis gibt also die Anzahl der passenden Stühle an, wenn wir die Tischanzahl wissen.

Baustein A – Aufgabe 5

Kompetenz: **K1a)** Variable deuten als Veränderliche
K2) Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen

Hinweise: Diese Aufgabe dient zur Vertiefung bzw. zum Üben der Inhalte der Aufgabe 1-4 von Baustein A

Impulse: Siehe Baustein A – Aufgabe 1-4

Lösungs-vorschlag:

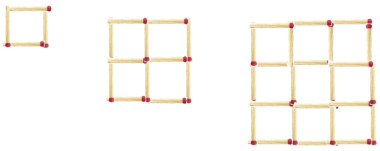
5 Streichholz-Bilderfolgen

Bilder aus MW Wdhl-Baustein Rechte bei Cornelsen

a)
- Wie viele Streichhölzer braucht man für die 3, 4 , ... 42, ... x Dreiecke?
- Schreibe erst Terme mit Zahlen auf.

Wie viele Dreiecke?	1	2	3	4	...	15	16	42	x
Wie viele Streichhölzer?	$1\cdot2+1$	$2\cdot2+1$	$3\cdot2+1$	$4\cdot2+1$		$15\cdot2+1$	$16\cdot2+1$	$42\cdot2+1$	$x\cdot2+1$

b)
- Wie viele Streichhölzer braucht man für Quadrate mit 3, 4, ... 42 Streichhölzern in einer Seite? Schreibe Terme mit Zahlen auf.
- Und wie viel für das x-te Quadrat? Achtung, manchmal braucht man das x mehrfach im Term.



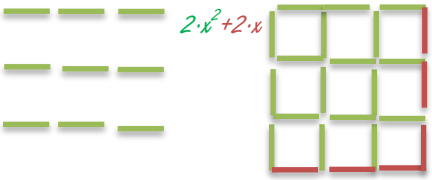
Seitenlänge des Quadrats	1	2	3	4	...	15	16	42	x
Wie viele Streichhölzer?	$2\cdot1^2+2\cdot1$	$2\cdot2^2+2\cdot2$	$2\cdot3^2+2\cdot3$	$2\cdot4^2+2\cdot4$		$2\cdot15^2+2\cdot15$	$2\cdot16^2+2\cdot16$	$2\cdot42^2+2\cdot42$	$2\cdot x^2+2\cdot x$

c)
- Wieso ist der Term in **b)** von anderer Form als die bisherigen?
- Schreibe einen weiteren Term auf für die Quadrate aus **b)**. Strukturiere sie dafür anders.

Der Term ist anders, weil ich häufiger die Zahl für die Seitenlänge in den Term einsetzen muss, das x also häufiger im Term vorkommt.

mögliche Terme:

- $2\cdot x^2+2\cdot x$: x^2 $2\cdot x^2+2\cdot x$

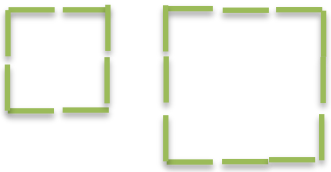


- $2\cdot(x+1)\cdot x$: erst die Waagerechten, $(x+1)\cdot x$, und dann für die Senkrechten das gleiche noch mal
- $4\cdot x+(x-1)\cdot x\cdot 2$: erst die Ränder, $4\cdot x$, dann die Mitte dazu, $+(x-1)\cdot x\cdot 2$
- ...

d) Lege oder skizziere selbst zwei Streichholz-Bilderfolgen zu den Termen $2x^2$ und $4\cdot(x+1)$.

Für $2\cdot x^2$ siehe z.B. die erste Möglichkeit unter c (ohne $2\cdot x$)

$4\cdot(x+1)$:



Baustein A – Aufgabe 6

Kompetenz: **K1a)** Variable deuten als Veränderliche
K2) Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen

Hinweise: Diese Aufgabe dient zur Vertiefung bzw. zum Üben der Inhalte der Aufgabe 1-4 von Baustein A

Impulse: Siehe Baustein A – Aufgabe 1-4

Lösungs-vorschlag:

6 Würfeltürme

Bilder aus MW Wdhl-Baustein Rechte bei Cornelsen

a) In der ersten Würfelmauer sind 7 Würfel.
Wie viele Würfel braucht man für die 3., 4. , ... 127., ... jede x-beliebige Mauer?
Gib einen Term mit x an, mit dem die Zahl der Würfel in der x-ten Mauer bestimmt werden kann.

Wie vielte Würfelmauer?	1	2	3	4	...	15	16	...	42	x
Wie viele Würfel?	$3+1\cdot4 = 7$	$3+2\cdot4 = 11$	$3+3\cdot4 = 15$	$3+4\cdot4 = 19$		$3+15\cdot4 = 63$	$3+16\cdot4 = 67$		$3+42\cdot4 = 171$	$3+x\cdot4$

b) Wie viele Seitenflächen sind in der 1., 2., 3., ..., 42., ... x-ten Figur unverdeckt?
Schreibe die Zahlenfolge auf und gib den Term für die x-te Figur an.

Wie vielte Würfelmauer?	1	2	3	4	...	15	16	...	42	x
Wie viel Seitenflächen?	$13+1\cdot14 = 27$	$13+2\cdot14 = 41$	$13+3\cdot14 = 55$	$13+4\cdot14 = 69$		$13+15\cdot14 = 223$	$13+16\cdot14 = 237$		$13+42\cdot14 = 601$	

$13+x\cdot14$

Baustein B – Aufgabe 1

Kompetenz: **K1a)** Variable deuten als Veränderliche
K2) Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen, **c)** Teilterme als einer Größe

K3a) Interpretieren der Tabelle und Verknüpfung mit Situation und algebraischer Darstellung

Hinweise: Aufgabe 1-2 (und ggf. 3) können von den Lernenden in einem Zug bearbeitet werden.
Anhand dieser Aufgabe unterstützt, durch ein Erklärvideo (Aufgabe 2), wird explizit zwischen der Variable als Einsetzstelle und der Veränderlichen (*jede beliebige Zahl*) unterschieden (siehe Abb. 2 im didaktischen Kommentar): „In dem x in der letzten Zeile stecken alle möglichen Zahlen, die jemals in der Fahrzeitspalte auftauchen können und nicht nur eine ausgesuchte Zahl“
Ein Gespräch über die *Spaltenüberschriften* bietet Anlass, um darüber zu sprechen, dass (Teil-) Terme eine neue Größe beschreiben (z.B. Kosten für die reine Fahrzeit).
An der *Tabelle* sollten *die verschiedenen Sichtweisen* herausgearbeitet werden: horizontal für den sukzessiven Aufbau des Terms, vertikal dafür, welche Größen immer gleich bleiben und welche sich verändern.

Impulse: Zeigt doch mal in der Tabelle: Welche Zahlen sind immer gleich, und welche verändern sich.
Aufgabe 3 (Baustein B) bietet viele weitere wichtige Gesprächsimpulse.

Lösungs-vorschlag:

1 Kosten für's E-Scooter-Fahren beschreiben

Till hat sich in den letzten Tagen immer mal wieder einen E-Scooter ausgeliehen.
In der folgenden Tabelle siehst du, wie lange er gefahren ist und wie viel er dafür bezahlt hat.
Rechts steht das E-Scooter-Angebot, das Till nutzt.

Servicepreis
E-Scooter: 0,15 € pro Minute und
1 € für's Entsperren
Standardtarif (0,15€/min) wird fällig, wenn du den E-Scooter über die App entsperrst.

a)
- Ergänze die fehlenden Werte in Tills Tabelle. Für den 2. Juni kannst du dir **irgendeine** Fahrzeit aussuchen.
- Notiere Überschriften für die Spalten.
- Vervollständige die letzte Zeile.

Tag	Fahrzeit (in min)	Kosten reine Fahrzeit (in €)	Fahrtkosten/ Kosten mit Entsperren	Fahrtkosten ausgerechnet (in €)
16. Mai	20	20 · 0,15	20 · 0,15 + 1	4,00
19. Mai	12	12 · 0,15	12 · 0,15 + 1	2,80
24. Mai	27	27 · 0,15	27·0,15 + 1	5,05
25. Mai	18	18 · 0,15	18·0,15 + 1	3,70
29. Mai	33	33 · 0,15	33·0,15 + 1	5,95
02. Juni	z.B. 15	15 · 0,15	15·0,15 + 1	3,25
Für jede beliebige Fahrzeit:	x	x·0,15	x·0,15+1	(geht nicht)

b) Erkläre in eigenen Worten:
- Was bedeutet die Rechnung in der **markierten Zelle** in der letzten Zeile? Was rechnest du damit aus?
- Was bedeutet für dich „jede beliebige Fahrzeit“?
- Warum stimmt die Rechnung in der **markierten Zelle** für jede beliebige Fahrzeit?
- Warum muss Till multiplizieren in 20 · 0,15 am 16. Mai?

Das bedeutet die Rechnung: Der Term beschreibt die gesamten Fahrtkosten für eine beliebige Fahrzeit x. Die Fahrzeit in Minuten (x) wird mit dem Preis pro Minute (0,15€) multipliziert und anschließend werden die einmaligen Entsperrkosten (1€) addiert.

Das bedeutet „jede beliebige Fahrzeit“: Jede beliebige Fahrzeit“ meint, dass es keine festgelegte Zahl für x gibt, sondern der Term für alle möglichen Zahlen den Fahrpreis angibt.

Darum stimmt meine Rechnung für „jede beliebige Fahrzeit“: Die Rechnung beschreibt die beliebige Minutenanzahl durch die Variable x. Da man pro Minute 0,15€ bezahlen muss, wird diese Anzahl mal den Minutenpreis gerechnet. Anschließend muss noch 1€ für das einmalige Entsperren addiert werden. Dieser Term gilt für jede beliebige Fahrzeit x.

Darum muss Till in 20 · 0,15 multiplizieren: Da man pro Minute 0,15€ bezahlen muss, wird die Minutenanzahl mal den Minutenpreis gerechnet. Die Minutenanzahl ist hier 20 Minuten. Daraus ergibt sich 20·0,15.

Baustein B – Aufgabe 2

Kompetenz: **K1a)** Variable deuten als Veränderliche
K2) Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen, **c)** Teilterme als einer Größe
K3a) Interpretieren der Tabelle und Verknüpfung mit Situation und algebraischer Darstellung

Hinweise: Diese Aufgabe knüpft direkt an Aufgabe 1 an und unterstützt die Lernenden bei der Arbeit mit einem interaktiven Erklärvideo, das die Inhalte der Erarbeitungsaufgabe 1 systematisiert.
Die Lernenden haben hier also nicht nur Gelegenheit den Inhalt zu korrigieren, sondern auch die Arbeit mit Erklärvideos zu üben.

Impulse: Die inhaltliche Diskussion lässt sich gut mit Hilfe von Aufgabe 3 (Baustein B) aufgreifen. Im Anschluss an diese Aufgabe ließe sich gut über die Arbeit mit dem Medium Erklärvideo sprechen: Wie haben euch bei Interaktionsmöglichkeiten (Drag & Drop) unterstützt? Habt ihr die Selbsterklärungs-Aufgaben gewissenhaft ausgeführt? (Denn das hilft sehr dabei, das Video wirklich in der Tiefe zu verarbeiten.)

Lösungs-vorschlag:

2 Kosten für's E-Scooter-Fahren – Mit Variablen veränderliche Zahlen beschreiben

Vorbereitung auf das Video:

a) Vergleicht eure Ergebnisse aus Aufgabe **1**. Hattet ihr bei etwas Schwierigkeiten? Habt ihr eine Frage? Notiert eure Fragen hier:

- *Schwierigkeiten bei der Benennung der Spalten*
- *Wie kann man „jede beliebige Zahl" schreiben?*
- *...*

Arbeit mit dem Video:

Erklärvideo:

b) Überprüft eure Lösungen von **Aufgabe 1** mit dem Erklärvideo und vervollständigt die folgenden Sätze. Entscheidet euch dabei für eine der **fett-markierten** Möglichkeiten.

„Kosten reine Fahrzeit (€)" / „~~Minutenpreis (€)~~" ist eine bessere Überschrift für die 3. Spalte als **„~~Kosten reine Fahrzeit (€)~~" / „· Minutenpreis (€)"**, weil… *damit der ganze Term beschrieben wird und nicht nur der Teil, der in dieser Spalte neu dazukommt.*

„Eine Variable ist eine Zahl, die man sich aussuchen kann" **~~stimmt~~/stimmt nicht**, weil …

… eine Variable nicht nur für eine beliebige Zahl steht, sondern für alle beliebigen Zahlen. Eine Variable ist also keine Zahl, sondern steht für alle möglichen Zahlen.

„Der Term x · 0,15 +1 steht für die veränderliche Fahrzeit" **~~stimmt~~/stimmt nicht**, weil …

… der Term für die Fahrtkosten für jede beliebige Fahrzeit steht. Die veränderliche Fahrzeit ist hier nur die Variable x.

Nach dem Video:

c) Stimmen eure Antworten in **Aufgabe 1** jetzt alle? Verbessert, wenn nötig:
- die Einträge in der Tabelle (Spaltenüberschriften, letzte Zeile),
- eure Formulierungen aus **1b)**.

d) Konnten eure Fragen aus **2a)** zu Aufgabe **1** beantwortet werden? Formuliert hier eure Antwort:

Antworten auf unsere Fragen zu Aufgabe 1:

… Ideen um den Term als eine einheitliche Größe zu Beschreiben (Kosten reine Fahrzeit) / Verwendung der Variable x, um jede beliebige Zahl zu beschreiben / …

Baustein B – Aufgabe 3

Kompetenz: Siehe Aufgabe 1 (Baustein B)

Hinweise: Diese Aufgabe ist eine Fehlerbearbeitungs-Aufgabe. Sie greift typische Lernenden-Fehler von Aufgabe 1 (Baustein B) auf. Hierdurch können die relevanten Unterschiede zwischen Einsetzstelle und Veränderlicher (Pascals 100 min), und zwischen Beziehungs- und Rechnungssichtweise auf den Term (Miriam und Pascal) thematisiert werden.

Impulse: Das „+ Entsperrkosten“, wo sehe ich das denn in den Rechnungen in der 4. Spalte? Zeigt mal. Zeigt mal in der Tabelle, welche Zahlen stecken alle in dem x drin.

Lösungs-vorschlag:

3 Kosten für's E-Scooter-Fahren – Allgemeine Terme verstehen

Servicepreis
E-Scooter: 0,15 € pro Minute und
1 € für's Entsperren

a) Pascal und Miriam haben Fehler gemacht beim Ausfüllen der Tabelle.
Erkläre ihnen, was falsch ist.

Pascal: Fahrzeit + Minutenpreis, weil die 0,15 kommen ja in der Spalte neu dazu.

Hilfe bei der Antwort für Pascal? Schau noch mal in das Video ab **Minute 1:15**

Pascal, das ist falsch, weil … der Minutenpreis nicht nur einmal dazukommt, sondern pro Minute bezahlt werden muss, also für jede Minute 0,15€. Das ist dann Fahrzeit · 0,15.

Miriam: In die Überschrift schreibe ich immer, welche Größe neu dazukommt, deswegen „+ Entsperrkosten“.

Miriam, das ist nicht ganz falsch. Aber besser ist es, wenn … du beschreibst, was im ganzen Term steht, also auch die Fahrtkosten hinschreibst.
Weil… in der Tabelle ja der ganze Term steht und nicht nur das, was jeweils neu dazukommt. Wenn es also ganz richtig sein soll, muss man den ganzen Term beschreiben.

Tag	Fahrzeit	Fahrzeit + Minutenpreis (in €)	+ Entsperrkosten (in €)	Gesamtkosten ausgerechnet (in €)
16. Mai	20	20 · 0,15	20 · 0,15 + 1	4,00
19. Mai	12	12 · 0,15	12 · 0,15 + 1	2,80
24. Mai	27	27 · 0,15	27 · 0,15 + 1	5,05
25. Mai	18	18 · 0,15	18 · 0,15 + 1	3,70
29. Mai	33	33 · 0,15	33 · 0,15 + 1	5,95
Für jede beliebige Fahrzeit:	100	100 · 0,15	100 · 0,15 + 1	16,00

Pascal: Jede beliebige Zahl heißt, ich kann mir eine Zahl aussuchen. Ich nehme einfach 100.

Hilfe bei der Antwort für Pascal? Schau noch mal in das Video ab **Minute 4:35**

Pascal, das ist falsch, weil … jede beliebige Zahl keine festgelegte Zahl meint. Wenn du dir die 100 aussuchst, dann ist es auf 100 festgelegt. Es soll aber für alle Zahlen gelten, daher brauchen wir für einen Term für jede beliebige Zahl eine Variable.

b) Beantworte die Fragen von Farid und Yasmin:

Yasmin: Die allgemeinen Gesamtkosten x · 0,15 + 1 sind ja mit x. Das kann man ja gar nicht ausrechnen. Was soll das bringen, die anzugeben?

Hilfe bei der Antwort für Yasmin? Schau noch mal in das Video ab **Minute 5:10**

Antwort für Yasmin: Mit dem Term kannst du alle möglichen Gesamtkosten für jede beliebige Fahrzeit beschreiben. Man hat also ganz kompakt jeden Gesamtkosten-Term erfasst, und muss nicht ganz viele Einzelrechnungen aufschreiben. Man sieht gut, was sich ändert und was gleichbleibt.

Farid: Warum stimmt die Rechnung x · 0,15 + 1 denn **immer**? Wir haben doch nur 5 Fahrzeiten ausprobiert.
Kann das nicht bei 1042 Minuten Fahrzeit ganz anders sein?

Antwort für Farid: Die Fahrtkosten setzen sich immer gleich zusammen: Wir zahlen für jede Minute 0,15€ und müssen einmalig 1€ als Entsperrkosten bezahlen. Also müssen wir immer Fahrzeit · 0,15 + Entsperrkosten rechnen.

Baustein B – Aufgabe T1

Kompetenz: **K1a)** Variable deuten als Veränderliche
K2) Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen, **c)** Teilterme als einer Größe
K3a) Interpretieren der Tabelle und Verknüpfung mit Situation und algebraischer Darstellung

Hinweise: Erfahrungen mit Tabellenkalkulation ermöglichen manchen Lernenden erst, die Sinnstiftung der Veränderlich (emotional) nachzuerfinden: „Ich schreibe nur eine Rechnung, und das Programm rechnet dann alles von allein für mich aus."
Die Aufgabe ist so angelegt, dass auch ein Erstkontakt mit Tabellenkalkulation möglich ist.

Impulse: Wir haben ja in der letzten Stunde für Tills E-Scooter-Fahrten den Term $x \cdot 0{,}15+1$ aufgestellt. Wie hat euch der Term bei der Erstellung der Excel-Tabelle geholfen? Wo findet ihr das x in der Excel-Tabelle wieder?

Lösungs-vorschlag:

T1 Mit Tabellen-Kalkulation Sachverhalte allgemein beschreiben

In Tills Tabelle wird immer wieder das Gleiche berechnet. Dabei kann Tabellen-Kalkulation helfen.

Tabellen-Kalkulation ist ein Computerprogramm, mit dem man in Tabellen rechnen kann.

a) Verschaff dir einen ersten Überblick über die Arbeit mit Tabellenkalkulation in dem Erklärvideo.

Erklärvideo Tabellenkalkulation:

b) Übertrage Tills Tabelle in die Online-Datei. Die Bilder helfen dir bei der Eingabe.

Online-Datei:

Formel schreiben mit Bezug auf Zelle B2:

	A	B	C	D
1	Tag	Fahrzeit in min	Kosten für die reine Fahrzeit	Gesamtkosten (mit Entsperren)
2	16. Mai	20	=B2*0,15	
3	19. Mai	12		

Eine Rechnung am Kästchen unten rechts auf andere Zeilen übertragen:

	A	B	C	D
1	Tag	Fahrzeit in min	Kosten für die reine Fahrzeit	Gesamtkosten (mit Entsperren)
2	16. Mai	20	3,00 €	4,00 €
3	19. Mai	12	1,80 €	
4	24. Mai	17	2,55 €	

c) Notiere die Formeln, mit denen Till mit Hilfe von Excel
- die Kosten für die reine Fahrzeit am 19. Mai berechnen kann

  = B3*0,15

- die Gesamtkosten für die Fahrt am 24. Mai berechnen kann

  = B4*0,15+1

d) Berechne mit Hilfe von Excel: Wieviel muss Till für 123.456.789 min Fahrzeit zahlen?

(123.456.789*0,15+1) = 18.518.519,35

e) Nathan schreibt in Zelle C2 die Eingabe
= B*0,15

	A	B	C	D
1	Tag	Fahrzeit in min	Kosten für die reine Fahrzeit	Gesamtkosten (mit Entsperren)
2	16. Mai	20	=B*0,15	
3	19. Mai	12		

Aber die Tabellen-Kalkulation kann mit dieser Eingabe nicht arbeiten.

	A	B	C	D
1	Tag	Fahrzeit in min	Kosten für die reine Fahrzeit	Gesamtkosten (mit Entsperren)
2	16. Mai	20	#NAME?	
3	19. Mai	12		

Erkläre:
- Was ist Nathans Fehler bei der Eingabe = B*0,15?

Nathan hat zwar den Spaltennamen B, aber keinen Zeilennamen eingegeben. So weiß das Programm nicht welche Zelle aus Spalte B gemeint ist. Eine Zellenbezeichnung besteht immer aus einem Buchstaben und eine Zahl.

- Was wollte Nathan vermutlich mit seiner Eingabe = B*0,15 ausdrücken? Warum ist die Eingabe eigentlich eine *richtig gute Idee*?

Nathan meinte wahrscheinlich die Zelle B2, weil er die Fahrzeit (aus B2) mit 0,15 multiplizieren will. Nur die Spalte B einzutragen ist eine gute Idee, weil dann jede beliebige Zahl aus der Spalte B mit 0,15 multipliziert würde und der Term dann für alle möglichen Zahlen gilt.

Baustein B – Aufgabe 4

Kompetenz: **K2)** Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen, **c)** Teilterme als einer Größe

Hinweise: In dieser Aufgabe das Aufstellen von Termen zu vorgegebener Sachsituation geübt, insbesondere die Strategie, sich für veränderliche Größe erst mal eine Zahl auszusuchen. Über diese Strategie sollte reflektiert werden. Zudem werden Erklärungen der Beziehungen zwischen Größen (Operationen) eingefordert und dafür Sprachvorbilder angeboten.

Impulse: (Am Ende:) Jetzt lasst uns noch mal das alles anschauen: Wieso war das denn so hilfreich, dass wir uns im ersten Schritt erst mal für die veränderlichen Zahlen Beispiele überlegt haben?

Lösungs-vorschlag:

4 Wie teuer ist eine Taxifahrt? – Komplizierte Terme Schritt für Schritt aufbauen

Marie: Beim Taxifahren gibt es ja echt viele verschiedene Kosten.
Till: Und einige Kosten sind fast immer anders.
Pia: Kann man die Gesamtkosten trotzdem irgendwie allgemein beschreiben?

Taxi-Angebot

• Grundgebühr	2,00 €
• Preis pro gefahrenem Kilometer	1,75 €
• Preis pro Minute für Wartezeit (z. B. an Ampeln, im Stau)	0,85 €
• Trinkgeld	beliebig

a) Diskutiert: Welche Größen sind für jede Fahrt immer gleich? Welche sind fast immer anders? Von welchen veränderlichen Größen hängt der Gesamtpreis ab?

Gleich: Grundgebühr, Preis pro km, Preis pro Warteminute
Veränderliche Größen: Kilometer, Wartezeit, Trinkgeld

b) Marie baut den Term für die Kosten der Taxifahrt erst für ein Zahlenbeispiel und setzt ihn dann Schritt für Schritt zusammen. Erkläre, wie sie vorgeht und fülle ihre Lücken.

Marie: Ich fange einfach mal mit Zahlenbeispielen an.

1. Veränderliche Größen notieren und Zahlenbeispiele überlegen:

Veränderliche Größe	Konkretes Zahlenbeispiel
• Kilometerzahl	z.B. 5 km
• *Wartezeit*	*z.B. 2 Minuten*
• *Trinkgeld*	*z.B. 3 €*
•	

2. Term Schritt für Schritt zusammenbauen mit Zwischenfragen:

	Zwischenfragen	Term	Plus oder Mal? Warum?
(1)	Wie viel bezahle ich für die gefahrenen Kilometer?	5 · 1,75 ↓	· , denn ich fahre 5 km. *Für jeden* Kilometer muss ich 1,75 € bezahlen, *also* bezahle ich insgesamt 5-**mal** den Kilometerpreis, also 5 **mal** 1,75€.
(2)	Wie viel bezahle ich für die Wartezeit?	*2·0,85* ↓	*· , denn ich warte 2 Minuten und für jede Minute muss ich 0,85€ bezahlen, also bezahle ich insgesamt 2-mal den Preis für die Wartezeit, also 2 mal 0,85€.*
(3)	Wie viel bezahle ich für das Trinkgeld und die Grundgebühr?	*3,00 + 2,00* ↓	*+ , denn ich muss einmalig 2€ für die Grundgebühren bezahlen und dann muss ich einmalig Trinkgeld geben (3€). Insgesamt bezahle ich also einmal 2€ und einmal 3€, das sind 2 plus 3.*
(4)	*Wie viel bezahle ich insgesamt?*	5 · 1,75 + *2·0,85 + 3,00* + 2,00	*+ und ·, weil ich hier alle Teilterme zusammenrechne, den Preis für die gefahrenen km, den Preis für die Wartezeit, das Trinkgeld und die Grundgebühr. Die Summe gibt den endgültigen Preis an.*

c) Was meint Pia? Erkläre.
Wie lassen sich alle möglichen Taxifahrten beschreiben?

Pia: Maries Term in Schritt 4 ist aber immer noch nicht allgemein für alle möglichen Taxi-Fahrten!

Meine Idee für eine allgemeine Beschreibung für alle möglichen Taxifahrten:
x · 1,75 + y · 0,85 + 3,00 + 2,00 mit Kilometerzahl x und Wartezeit y
oder *Kilometerzahl · 1,75 + Wartezeit · 0,85 + 3,00 + 2,00*

Baustein B – Aufgabe 5

Kompetenz: **K1a)** Variable deuten als Veränderliche
K2) Terme deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen, **c)** Teilterme als einer Größe,
d) inhaltlich argumentieren für die Allgemeingültigkeit von Termen
K3a) Interpretieren der Tabelle und Verknüpfung mit Situation und algebraischer Darstellung

Hinweise: Auch in dieser Aufgabe wird das Aufstellen von Termen zu vorgegebener Sachsituation geübt. Hier nun insbesondere das verallgemeinern mit Variablen. Hierfür sollen die Lernenden die Tabelle als nützliches Hilfsmittel ergänzen. Die Vision ist, dass Lernende zum Aufstellen von Termen zu Sachsituationen/Textaufgaben Tabellen nutzen können, um ihre Gedanken zu ordnen.

Impulse: (Am Ende:) Jetzt lasst uns noch mal das alles anschauen: Wieso war das denn für das Aufstellen von allgemeinen Termen so hilfreich, so eine Tabelle zu zeichnen wie Till?

Lösungsvorschlag:

5 Wie teuer ist eine Taxifahrt? – Erklären, warum allgemeine Terme immer stimmen

a) Till sucht den allgemeinen Term mit einer Tabelle.
- Schreibe Überschriften in jede Spalte.
- Vervollständige Tills Tabelle.

Till: Mit der Tabelle behalte ich den Überblick. Ich brauche mehrere Beispiele. Denn dann kann sich sehen, welche Größen sich verändern und welche immer gleichbleiben.

Veränderliche Größen — Komplizierte Teilterme

Fahrtstrecke (in km)	Wartezeit (in min)	Trinkgeld (in €)	Grundgebühr (in €)	Kosten der Fahrtstrecke (in €)	Kosten für die Wartezeit (in €)	Gesamtkosten als Term (in €)
20	3	5,00	2,00	20 · 1,75	3 · 0,85	20·1,75 + 3·0,85 + 2 +5
1	0	2,50	2,00	1 · 1,75	0 · 0,85	1·1,75 + 0·0,85 + 2 + 2,5
13	2	0,50	2,00	13 · 1,75	2 · 0,85	13·1,75 + 2·0,85 + 2+0,5
4	7	3,00	2,00	4 · 1,75	7 · 0,85	4·1,75 + 7·0,85 + 2 + 3
Für jede beliebige Taxi-Fahrt:						
x	y	z	2,00	x · 1,75	y · 0,85	x·1,75 + y·0,85 + 2 + z

b) Erkläre für die letzte Zeile in Tills Tabelle: Warum sind die Gesamtkosten *veränderlich*? Woran kann man das am Term für die Gesamtkosten erkennen?

Die Gesamtkosten sind veränderlich, weil es drei veränderliche Größen gibt. Die Fahrtstrecke, die Wartezeit und das Trinkgeld sind veränderlich und bestimmen daher die Gesamtkosten mit. Die Fahrtstrecke und die Wartezeit werden dabei jeweils mit den jeweiligen Tarifen multipliziert, das Trinkgeld und die Grundgebühr werden einmalig addiert.

c) Was ist Pias Problem? Erklärt ihre Frage in eigenen Worten.

Pia: Warum stimmt x · 1,75 als Term für die Kosten für die gefahrenen Kilometer eigentlich immer? Till hat sich doch nur 4 Beispiele angeschaut! Was ist denn mit den vielen anderen Kilometerzahlen? Stimmt der Term x · 1,75 dann überhaupt? Warum?

d) Wie würdet ihr Pia antworten?

Liebe Pia,
der Term passt auch für andere Kilometerzahlen, weil ...man für jeden gefahrenen Kilometer 1,75€ bezahlen muss. Die gefahrene Kilometerzahl gibt an, wie viel Mal man den Kilometerpreis bezahlen muss. In dem Term steht die Variable x für die Kilometerzahl. Egal, welche Kilometerzahl du dir aussuchst, du musst für jeden Kilometer 1,75€ bezahlen. Das sind dann x-mal der Kilometerpreis, also sind das x mal 1,75€.

Hilfreiche Satzbausteine für die Antwort:
- „Für jeden Kilometer muss man … bezahlen"
- „Die Kilometerzahl gibt an, wie viel Mal man den Kilometerpreis bezahlen muss."
- Die Variable x steht für …
- „Egal, welche Kilometerzahl du dir aussuchst, …"
- „Also muss man …-mal den Kilometerpreis bezahlen, das sind … mal 1,75 €."

e) Begründe auch, warum der Term für die Wartekosten y · 0,85 *immer* stimmt.

Baustein B – Aufgabe 6

Kompetenz: Siehe Aufgabe 4 und 5 (Baustein B)

Hinweise: Das Aufstellen von Termen sollte in Anschluss an Aufgabe 4 und 5 an vielen weiteren Beispielen geübt werden, damit die beiden Strategien „erst mal Beispielzahlen aussuchen“ (Aufgabe 4) und „Tabellen anlegen“ (Aufgabe 5) von den Lernenden verinnerlicht werden können. Diese Aufgabe 6 stellt eine eher offenere Übungsaufgabe mit Modellierungscharakter dar und sollte erst etwas später im Vertiefungsprozess genutzt werden, wenn die Lernenden schon sicherer sind – oder müsste geschlossen gestaltet werden.

Lösungsvorschlag:

6 Wie teuer ist der E-Scooter im Jahr? – Selbstständig komplizierte Terme aufstellen

Yasmin interessiert sich dafür, wie teuer E-Scooter-Fahren im Jahr ist.

Angebot
E-Scooter: 0,10 € pro Minute und 1,50 € für's Entsperren

Yasmin: Bei dem Angebot bezahle ich ja im Jahr über 500 €.

a) Stimmt darüber ab, ob Yasmin Recht hat.

b) Stelle einen Term auf für die Kosten für das gesamte Jahr.

Tipp: Stellt den Term zuerst mit einem Zahlenbeispiel auf wie Marie in **Aufgabe 4b**, und verallgemeinert dann mit einer Tabelle für viele Zahlenbeispiele wie Till in **Aufgabe 5**.

Marie: Ich fange einfach mal mit Zahlenbeispielen an.

Till: Mit der Tabelle behalte ich den Überblick. Ich brauche mehrere Beispiele. Denn dann kann sich sehen, welche Größen sich verändern und welche immer gleichbleiben.

Schritte, die bei der Aufgabe helfen

Einen Beispielterm aufstellen wie Marie in Aufgabe 4b

- die veränderlichen Größen notieren und Zahlenbeispiele überlegen
- den Term Schritt für Schritt zusammenbauen mit Zwischenfragen (Hierbei daran denken zu erklären, warum ich + oder · rechne.)
- am Ende einen Term mit veränderlichen Größen *für jede beliebige Zahl* notieren – hierbei kann Tills Vorgehen helfen:

Ich gehe davon aus, dass Yasmin *im Durchschnitt* 10 min pro Fahrt fährt, und 5-mal im Monat einen Scooter nutzt.

1.) Veränderliche Größen:
Es ist unklar, **wie oft** Yasmin **im Monat** fährt, daher z.B. 5-mal im Monat. Wir wissen nicht, **wie lange** Yasmin fährt, und nehmen eine durchschnittliche Fahrzeit an, z.B. 10 Minuten.

2.) Schritt für Schritt:
Wie teuer sind die reinen Fahrtkosten für eine Fahrt?
Yasmin fährt durchschnittlich 10 Minuten, pro Minute bezahlt sie 0,10€, also 10·0,10.
Wie teuer ist eine Fahrt?
Yasmin muss für jede Fahrt 1,50€ Entsperrkosten bezahlen, die gesamten Fahrtkosten für eine Fahrt sind dann 10·0,10 + 1,50
Wie teuer ist es, einen Monat lang zu fahren?
Yasmin fährt durchschnittlich 5-mal im Monat: 5·(10·0,10 + 1,50)
Wie teuer ist es, ein ganzes Jahr zu fahren?
Ein Jahr hat 12 Monate, daher muss der Monatspreis mal 12 gerechnet werden:
12·5·(10·0,10+1,50)

3.) Verallgemeinerung:
$12 \cdot x \cdot (y \cdot 0{,}10 + 1{,}50)$
x = durchschnittliche Anzahl der Fahrten im Monat
y = durchschnittliche Minutenzahl einer Fahrt

Eine Tabelle aufstellen wie Till in Aufgabe 5

- passende Tabelle anlegen: die veränderlichen Größen bekommen eine eigene Spalte, komplizierte Teilterme auch
- verschiedene Beispiele in die Tabelle eintragen
- in der letzten Zeile alles für *jede beliebige Zahl* allgemein beschreiben

Abschluss-Check:

- Stimmt der allgemeine Term (in der letzten Tabellen-Zeile) wirklich *immer*? Warum?

Tills Weg:

Durchschnittliche Anzahl der Fahrten pro Monat	Durchschnittliche Fahrzeit pro Fahrt (min)	Reine Fahrtkosten für eine Fahrt (in €)	Gesamtpreis für eine Fahrt (in €)	Preis im Monat (in €)	Preis im Jahr (in €)
5	30	$30 \cdot 0{,}10$	$30 \cdot 0{,}10+1{,}50$	$5 \cdot (30 \cdot 0{,}10+1{,}50)$	$12 \cdot 5 \cdot (30 \cdot 0{,}10+1{,}50)$
25	7	$7 \cdot 0{,}10$	$7 \cdot 0{,}10+1{,}50$	$25 \cdot (7 \cdot 0{,}10+1{,}50)$	$12 \cdot 25 \cdot (7 \cdot 0{,}10+1{,}50)$
...	...	...	...	...	...
x	y	$y \cdot 0{,}10$	$y \cdot 0{,}10+1{,}50$	$x \cdot (y \cdot 0{,}10+1{,}50)$	$12 \cdot x \cdot (y \cdot 0{,}10+1{,}50)$

Alternative Lösung (Maries Weg):

Anzahl der Fahrten in der Woche

- **Wie oft** fahre ich in der Woche zur Musikschule? Z.B. 1-mal
- **Wie oft** fahre ich in der Woche zu meiner Freundin? Z.B. 2-mal
- Zur Musikschule und zur Freundin muss ich immer hin- und zurückfahren

Dauer der Fahrten:

- **Wie lange** fahre ich zur Musikschule? Z.B. 4 min
- **Wie lange** fahre ich zu meiner Freundin? Z.B. 6 min

Weg zur Musikschule:

- Wie viel bezahle ich für einen Weg zur Musikschule? $4 \cdot 0{,}10+1{,}50$
- Wie viel für Hin- und Rückweg? $2 \cdot (4 \cdot 0{,}10+1{,}50)$
- Wie viel in der Woche? $1 \cdot 2 \cdot (4 \cdot 0{,}10+1{,}50)$

Weg zur Freundin:

- Wie viel bezahle ich für einen Weg zur Freundin? $6 \cdot 0{,}10+1{,}50$
- Wie viel für den Hin- und Rückweg? $2 \cdot (6 \cdot 0{,}10+1{,}50)$
- Wie viel in der Woche? - $2 \cdot 2 \cdot (6 \cdot 0{,}10+1{,}50)$

Wie viel bezahle ich insgesamt in der Woche? $1 \cdot 2 \cdot (4 \cdot 0{,}10+1{,}50) + 2 \cdot 2 \cdot (6 \cdot 0{,}10+1{,}50)$

Wie viel bezahle ich im Jahr (52 Wochen pro Jahr)?

$$52 \cdot [1 \cdot 2 \cdot (4 \cdot 0{,}10+1{,}50) + 2 \cdot 2 \cdot (6 \cdot 0{,}10+1{,}50)] = 634{,}40\ €$$

Allgemein: $52 \cdot [x_{Musik} \cdot 2 \cdot (y_{Musik} \cdot 0{,}10+1{,}50) + x_{Freundin} \cdot 2 \cdot (y_{Freundin} \cdot 0{,}10+1{,}50)]$

Reflexion: Nutze ich den Scooter jede Woche (auch in den Ferien; bei Krankheit; im Winter)? Benutze ich den Scooter auch für andere Ziele (Weg zur Schule;, zum Training)?

Baustein B – Aufgabe T2

Kompetenz: Siehe Aufgabe 4 und 5 (Baustein B)

Hinweise: Diese Aufgabe vertieft Aufgabe 6 und bindest Tabellenkalkulation ein, um das Modellierungsproblem ausführlich untersuchen zu können. Man könnte die Lernenden zu dieser Aufgabe auch einen ausführlichen *Forscherbericht (bzw. Gutachten für Pia)* zu ihrer Modellierung erstellen lassen, in dem sie ihr Vorgehen und ihre Beobachtungen in der Tabellenkalkulation geordnet berichten. (Bzw. könnte man dies auch einmal an dieser Aufgabe gemeinsam üben und es erst anschließen für ähnliche Modellierungsaufgaben die Lernenden selbst durchführen lassen.)

Lösungsvorschlag:

T2 Wie teuer ist der E-Scooter im Jahr? – Allgemeine Berechnungen mit der Tabellenkalkulation

a) Übertrage die Tabelle aus **6b** in ein Tabellenkalkulationsprogramm.
Die Bilder erinnern euch daran, wie das Programm für euch rechnen kann:

Formel schreiben mit Bezug auf Zelle B2:

	A	B	C	D
1	Tag	Fahrzeit in min	Kosten für die reine Fahrzeit	Gesamtkosten (mit Entsperren)
2	16. Mai	20	=B2*0,15	
3	19. Mai	12		

Eine Rechnung am Kästchen unten rechts auf andere Zeilen übertragen:

	A	B	C	D
1	Tag	Fahrzeit in min	Kosten für die reine Fahrzeit	Gesamtkosten (mit Entsperren)
2	16. Mai	20	3,00 €	4,00 €
3	19. Mai	12	1,80 €	
4	24. Mai	17	2,55 €	

Für b) können die Lernende verschiedene Fahrtanzahlen im Monat in der Tabellenkalkulation ausprobieren und herausfinden, ab welcher Anzahl der Jahrespreis über 500 € liegt, bspw. zahlt man bei 5-min durchschnittlicher Fahrzeit im Monat mit dem Term $12 \cdot x \cdot (y \cdot 0{,}10 + 1{,}50)$ für 20 Fahrten im Monat 480 € im Jahr, und für 21 Fahrten im Monat 504 € im Jahr. In die Lösungs-Spalte wird also 21 eingetragen:

b) Untersuche mit der Tabellenkalkulation folgende Frage:
Yasmin fährt im Durchschnitt 5 min (10, 15, 20, 25 min) nach dem Entsperren.
- Ab wie vielen Fahrten im Monat muss Yasmin mehr als 500 € im Jahr bezahlen?
- In der Tabelle kannst du deine Lösungen notieren.

Lösung Fahrten im Monat (Anzahl)	durchschnittliche Fahrzeit nach Entsperren (in min)	Gesamtkosten im Jahr (über 500 €)
21 Fahrten	5	504 €
17 Fahrten	10	510 €
14 Fahrten	15	504 €
12 Fahrten	20	504 €
11 Fahrten	25	528 €

c) Yasmin möchte im Jahr **weniger** als 500 € bezahlen, und sie fährt durchschnittlich 20 min nach dem Entsperren. Wie vielen Fahrten darf Yasmin dann im Monat machen?
Formuliere die Antwort auf zwei verschiedene Weisen. (Der Tipp unten kann dir helfen.)

Deine Überlegung: In dem Term $12 \cdot x \cdot (y \cdot 0{,}10 + 1{,}50)$ ist die Fahrzeit y jetzt festgelegt auf 20 Minuten, sie muss also pro Fahrt durchschnittlich $20 \cdot 0{,}1 + 1{,}50 = 3{,}50$ ausgeben. Jetzt ist die Frage, wie oft sie pro Monat 3,50 ausgeben darf, damit sie im Jahr (also mal 12) unter 500 € bleibt. Probieren wir aus, dann kosten 10 Fahrten pro Monat 420€, 15 Fahrten 630 €, die Lösung liegt dazwischen. 12 Fahrten liegen mit 504 € knapp darüber, 11 Fahrten pro Monat ergibt 462 €. A: Sie darf maximal 11-mal im Monat fahren, wenn sie im Schnitt 20 min fährt.

Tipp: So kann man die Ideen z.B. ausdrücken:
- Sie darf 4-mal fahren oder weniger/mehr
- Sie muss unter/über 4 Fahrten bleiben
- Sie darf nur weniger/mehr als 4-mal fahren

d) Untersuche mit der Tabellenkalkulation folgende Frage:
Yasmin möchte weniger als 500 € im Jahr bezahlen, und sie will 15 mal im Monat fahren.

Wie lange darf Yasmin im Durchschnitt pro Monat fahren? In dem Term $12 \cdot x \cdot (y \cdot 0{,}10 + 1{,}50)$ ist die Anzahl der Fahrten im Monat x jetzt fest 15. Sie fährt also 180-mal im Jahr. Für durchschnittlich 10 Fahrminuten sind das 450 €, für durchschnittlich 15 min 540 €. Für durchschnittlich 13 min sind es 504 €, also muss sie unter 13 min pro Fahrt bleiben und darf 12 min fahren, um unter 500 € zu bleiben (486 €).

Baustein B – Aufgabe 7: Speicherkiste B füllen

Hinweise: In der Speicherkiste werden die wichtigsten Erkenntnisse des Bausteins B gesammelt, und für die anschließende Übungs- und Vertiefungsphase sowie spätere Lernabschnitte aufbewahrt. Sie ist so gestaltet, dass die Lernenden auch beim Sichern mitdenken dürfen (kognitiv aktiviert sind).

Lösungs-vorschlag:

7 Speicherkiste B füllen

Vervollständige Speicherkiste **B**, indem du

(1) die Tabelle vervollständigst,
(2) den Term 1,5 + x · 0,8 erklärst,
(3) „jede beliebige Zahl" erklärst,
(4) auswählst, wozu man Variablen braucht.

Speicherkiste B: Terme mit Variablen für veränderliche Zahlen

Wenn sich bei vielen Rechnungen einige Zahlen verändern, kann man die Rechnungen durch allgemeine Rechenausdrücke (*Terme*) aufschreiben. In Tabellen sieht man, *welche Zahlen sich ändern* und *welche gleich bleiben*.

Beispiel: Amir trainiert für einen Marathon. Im Training läuft er sich zuerst warm. Danach läuft er mehrere große oder kleine Runden im Park.

Warmlaufen	1,5 km
große Parkrunde	0,8 km
kleine Parkrunde	0,4 km

Veränderliche Zahlen — Komplizierte Teilterme

Anzahl große Runden	Anzahl kleine Runden	Warmlaufen (in km)	Strecke große Runden (in km)	Strecke kleine Runden (in km)	Gesamte Trainings-strecke (in km)
z.B. 4	3	1,5	4·0,8	3·0,4	4·0,8 + 3·0,4 + 1,5
5	4	1,5	5·0,8	4·0,4	5·0,8 + 4·0,4 + 1,5
8	0	1,5	8·0,8	0·0,4	8·0,8 + 0·0,4 + 1,5
Für jede beliebige Trainingsstrecke:					
x	y	1,5	x · 0,8	y·0,4	x·0,8 + y·0,4 + 1,5

So erklärt man, was ein Term mit Variablen bedeutet:

Erklären zu 3 Fragen:
1. Wofür stehen die Variablen?
2. Warum nimmst du diese Rechenarten?
3. Was beschreibt der Term genau?

Beispiel: 1,5 + x · 0,8

Die Variable x steht für … alle beliebigen Anzahlen von großen Runden.

Bei x · 0,8 rechne ich · , weil … jede große Runde 0,8km lang ist. Man läuft also x-mal die Strecke für eine große Runde.

Bei 1,5 + x · 0,8 rechne ich + , weil … einmalig das Warmlaufen von 1,5km dazukommt.

Der Term 1,5 + x · 0,8 insgesamt steht für … die Laufstrecke ohne die kleinen Runden.

Das bedeuten „x steht für *jede beliebige* Zahl" und „x steht für *alle möglichen* Zahlen"

Wenn x für veränderliche Zahlen steht, dann sagt man x steht für *jede beliebige Zahl*.
Manchmal sagt man auch x steht für *alle möglichen Zahlen*.

So kann man erklären, was „jede beliebige Zahl" bedeutet:

Beschreibung: x meint alle möglichen Zahlen, also etwas, das allgemein für alle Zahlen gilt.
Abgrenzung: x bedeutet keine bestimmte oder ausgesuchte Zahl, sondern steht für alle Zahlen.
Beispiel: x kann für 1,4,9,1000, usw. stehen; es ist keine Zahl festgelegt.

Dazu kann man Variablen als veränderliche Zahlen gebrauchen
(streiche durch, was nicht passt)

- Mit Variablen kann man Zusammenhänge wie Trainingsstrecken, Fahrpreise, Gesamtkosten usw. allgemein beschreiben.
- ~~Mit Variablen muss man nichts mehr rechnen.~~
- Mit Variablen kann man zeigen, welche Zahlen sich in einer Rechnung verändern.

Deine Erklärung: Variablen kann man benutzen, um Zusammenhänge allgemein für alle möglichen Zahlen zu beschreiben. Die veränderlichen Zahlen einer Spalte aus der Tabelle können so als eine Variable geschrieben werden. Man kann dann nichts mehr direkt ausrechnen, aber man kann jede beliebige Zahl einsetzen und der Term ist immer richtig.

Baustein C – Aufgabe 8

Kompetenz: **K1b)** Variable deuten als Unbekannte
K2) Gleichungen deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen, **c)** Teilterme als einer Größe,
e) des Gleichheitszeichens

Hinweise: Diese Aufgabe dient einerseits dazu, dass die Lernenden eigen Ideen für Lösungsverfahren einfacher linearer Gleichungen vorstellen können, und andererseits dazu, Gleichungen inhaltlich zu deuten. Durch Sprachvorbilder können die Lernenden herausarbeiten, was für die inhaltliche Erläuterung einer Gleichung relevant ist, insbesondere die Erläuterung der auftauchenden Operationen und Variablen, und des Gleichheitszeichens.

Impulse: (Am Ende:) Legt die Zettel noch mal weg und lasst uns noch mal abschließend sammeln: Was muss ich alles erklären, wenn der Arbeitsauftrag ist „Erkläre, was die Gleichung … bedeutet“?

Lösungs-vorschlag:

C Unbekannte Größen bestimmen

8 Gleichungen mit unbekannten Größen aufstellen und erklären

a) Maja ist mit E-Scootern verschiedener Anbieter gefahren. Sie vergleicht die Fahrtberichte. Welchen Anbieter soll sie in Zukunft nutzen? Diskutiert eure ersten Ideen.

Fahrtbericht Anbieter A

Freitag, März 13 — 11 Minuten
2:22 PM – 2:33 PM — Zeit
3,20 €

Fahrtbericht Anbieter B

Buchung beendet
Vielen Dank für deinen Ride.
Bis zum nächsten Mal!
Dauer 13min
Preis 3,45 €

b) Analysiere nun genauer: Maja erinnert sich, dass bei Anbieter A das Entsperren 1 € kostet. Kannst du herausfinden, wie teuer eine Minute Fahren nach dem Entsperren ist? Probiere aus.

Manche Lernende erfinden hier bereits das Rückwärtsrechnen nach, andere versuchen sich an Lösungen durch (systematisches) Ausprobieren.

c) Maja will den Fahrpreis pro Minute (**Minutenpreis**) von Anbieter A wissen. Dazu schreibt sie eine Gleichung auf: $m \cdot 11 + 1{,}00 = 3{,}20$. Erkläre, was Majas Gleichung bedeutet:

1. Der Term / die Zahl rechts vom Gleichheitszeichen steht für … den Gesamtpreis von 3,20 €.
2. Das m steht in Majas Gleichung für…. den unbekannten Minutenpreis.
3. Der Term links vom Gleichheitszeichen steht für…. die Kosten für die gefahrenen Minuten mit Entsperrkosten von 1€.
4. Man schreibt zwischen die Terme/Zahlen ein Gleichheitszeichen, um auszudrücken….
dass der Term auf der einen Seite das Ergebnis auf der anderen Seite hat, also dass beide Terme das Gleiche beschreiben, den Gesamtpries für die Fahrt.

d) Bei Anbieter B kostet das Entsperren 0,20 €. Notiere eine passende Gleichung und erkläre, was sie bedeutet. Schreibe wie in **c)** mit den vier Satzanfängen.

Gleichung: $m \cdot 13 + 0{,}20 = 3{,}45$

1. siehe Teilaufgabe c)
2.
3.
4.

Baustein C – Aufgabe 9

Kompetenz: **K1b)** Variable deuten als Unbekannte
K3b) Interpretieren des Pfeilbilds und Verknüpfung mit Situation und algebraischer Darstellung

Hinweise: Das Rückwärtsrechnen zum Lösen einfacher linearer Gleichungen (der Form $ax+b=c$) ist eine Methode, die manche Lernenden selbstständig nacherfinden, andere brauchen hierbei Unterstützung. Hierbei kann das Pfeilbild als Darstellungsmittel helfen. Wichtig ist, dass die Lernenden die Situation und ihre intuitiven Lösungsideen mit dem Pfeilbild vernetzen. Dafür bietet es sich an, das Pfeilbild im Kontext zu deuten („Warum rechnen wir – 1? Warum : 11?“).
Darstellungsmittel müssen selbst auch erst gelernt werden. Hierbei unterstützt das Erklärvideo.
Für ein langfristiges Lernen ist es wichtig, dass die Lernenden das Pfeilbild auch mit den „einfacheren Gleichungen“ verknüpfen können. („Wo findet man die Gleichung im Pfeilbild wieder?“)

Impulse: Erklärt noch mal: Warum müssen wir beim Rückwärtsrechnen – 1 rechne, warum : 11?

Lösungsvorschlag:

9 Unbekannte Zahlen finden

Till: Aus der Gleichung müssen wir jetzt irgendwie die unbekannte Zahl rausfinden.

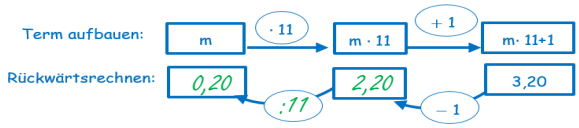
Amir: Ich rechne rückwärts im Pfeilbild.

Maja: Ich mach das mit Gleichungen, geht das auch?

a) Amir malt sich auf, wie er den Term aufbaut, und überlegt dann, wie er rückwärts rechnen kann.
- Schaue das Erklärvideo an, um zu verstehen, wie er denkt.
- Führe seine Rechnung zu Ende.

Erklärvideo:

Amirs Pfeilbild:



b) Maja überlegt sich einfachere Gleichungen, die dasselbe beschreiben.
- Wie kommt Maja auf ihre einfachere Gleichung $m \cdot 11 = 2{,}20$?
- Wieso kann sie sicher sein, dass diese Gleichung $m \cdot 11 = 2{,}20$ dieselbe unbekannte Zahl beschreibt wie $m \cdot 11 + 1{,}00 = 3{,}20$? Begründe mit dem E-Scooter-Angebot.

Majas einfachere Gleichungen:

$m \cdot 11 + 1{,}00 = 3{,}20$

$m \cdot 11 = 2{,}20$

$m = 0{,}20$

– Sie macht die Gleichung einfacher, indem sie die Entsperrkosten vom Gesamtpreis m·11+1 bzw. 3,20 abzieht.

– Die Gleichung beschreibt die gleiche unbekannte Zahl. Denn vorher war es der Gesamtpreis, der auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens stand, jetzt sind es die Fahrtkosten ohne Entsperre auf beiden Seite. Die unbekannte Zahl m wird dabei nicht verändert. Das Entsperren wurde auf beiden rückgängig gemacht/weggelassen.

c) Erkläre: Wie passen Majas und Amirs Rechnungen zusammen?
Wo kann man Majas Gleichungen, bspw. $m \cdot 11 = 2{,}20$, in Amirs Pfeilbild wiederfinden?

Man muss im Pfeilbild „von oben nach unten“ gucken.
m · 11 und 2,20 stehen beiden für Fahrkosten für 11 min.

d) Beantworte Tills Frage.

Till: Warum muss man eigentlich im letzten Schritt durch 11 teilen?

Maja: Dafür können wir überlegen, was wir gleichmäßig auf die 11 verteilen.

Man muss im letzten Schritt durch 11 teilen, weil wir die Fahrtkosten für die reine Fahrzeit von 2,20€ haben. 11 Minuten kosten also 2,20€. Wenn wir diese Kosten gleichmäßig auf die 11 Minuten verteilen, dann verteilen wir 2,20€ auf 11 Minuten, also 2,20€ : 11 = 0,20€.

e) Rechne wie Maja und Amir für **Anbieter B** (Entsperren 0,20 €). Zeichne ein eigenes Pfeilbild.

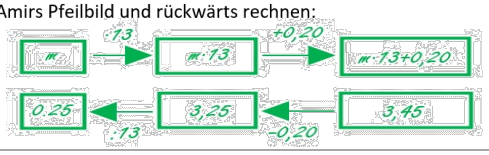
Majas einfachere Gleichungen:

$m \cdot 13 + 0{,}20 = 3{,}45$

$m \cdot 13 = 3{,}25$

$m = 0{,}25$

Amirs Pfeilbild und rückwärts rechnen:



Baustein C – Aufgabe 10

Kompetenz: **K1b)** Variable deuten als Unbekannte
K2) Gleichungen deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen, **c)** Teilterme als einer Größe,
e) des Gleichheitszeichens

Hinweise: Mit Hilfe dieser Aufgabe wird die anfängliche Fragestellung von Aufgabe 8a beantwortet. Sie hat Problemlösecharakter für Lernende, die noch nicht mit linearen Funktionen gearbeitet haben. Statt Teilaufgabe c kann man die Lernenden auch ein abschließendes Gutachten erstellen lassen, in dem vor allem auch die Lösungswege sichtbar gemacht werden sollen: Wie seid ihr zu eurem abschließenden Urteil gekommen?

Impulse: (Für schnelle Lernende:) Erklärt mal möglichst überzeugend, warum könnt ihr euch sicher sein, dass Anbieter A ab 17 min-Fahrzeit *immer* günstiger sein wird. Könnt nicht Anbieter B früher oder später mal wieder der günstigere sein? Am Anfang ist es doch auch andersherum? Warum sollte sich das nicht irgendwann wieder zurückwechseln?
[Antwort-Idee: pro Minute kommen bei B *immer* 0,05 € *mehr* dazu im Vergleich zu A]

Lösungs-vorschlag:

10 Zwei Tarife vergleichen

Maja: Jetzt weiß ich, wie teuer die beiden Anbieter sind. Aber welcher Tarif besser ist, weiß ich immer noch nicht.

Till: Was wissen wir denn schon?

a) Stelle die Informationen zu den Angeboten von Anbieter A und B aus Aufgabe **8** und **9** zusammen. Findest du auch Terme für den Gesamtpreis für jede beliebige Minutenzahl?

Angebot Anbieter A	Angebot Anbieter B
Grundpreis fürs Entsperren: 1€	Grundpreis fürs Entsperren: 0,20€
Minutenpreis: 0,20€	Minutenpreis: 0,25€
Term für Gesamtpreis für jede beliebige Minutenzahl: $m \cdot 0{,}20 + 1{,}00$	Term für Gesamtpreis für jede beliebige Minutenzahl: $m \cdot 0{,}25 + 0{,}20$

b) Berechne im Heft für Anbieter A und B:
- Wie viel Maja für 10 min (20 min) Fahrzeit bezahlt.
- Wie lange Maja für 3,20 € (4,20 €; 5,00 €) fahren kann.
  Du kannst das Pfeilbild oder einfachere Gleichungen nutzen.

Ergebnisse für Anbieter A	Ergebnisse für Anbieter B
– 10 Minuten: 3€; 20 Minuten: 5€	– 10 Minuten: 2,70€; 20 Minuten: 5,20€
– 3,20€: 11 Minuten;	– 3,20€: 12 Minuten;
4,20€: 16 Minuten;	4,20€: 16 Minuten;
5,00€: 20 Minuten	5,00€: 19,2 Minuten

c) Diskutiert noch mal und schreibt dann auf: Welcher Tarif ist wann der bessere?

Anbieter B ist besser bis 16 Minuten Fahrzeit, bei genau 16 Minuten ist es egal, über 16 Minuten Fahrzeit sollte man Anbieter A wählen.

Baustein C – Aufgabe 11: Speicherkiste C füllen

Hinweise: In der Speicherkiste werden die wichtigsten Erkenntnisse des Bausteins C gesammelt, und für die anschließende Übungs- und Vertiefungsphase sowie spätere Lernabschnitte aufbewahrt. Sie ist so gestaltet, dass die Lernenden auch beim Sichern mitdenken dürfen (kognitiv aktiviert sind).

Lösungs-vorschlag:

11 Speicherkiste C füllen

Vervollständige Speicherkiste C, indem du

a) erklärst, was die Gleichung $(1{,}75 \cdot x + 3{,}90) \cdot 2 = 49{,}80$ bedeutet;

b) die Gleichung $(1{,}75 \cdot x + 3{,}90) \cdot 2 = 49{,}80$ mit Hilfe von Pfeilbild und Gleichungen löst;

c) erklärst, wofür man Variablen als unbekannte Zahlen gebrauchen kann.

Speicherkiste C: Gleichungen mit Variablen für unbekannte Zahl

Manchmal sucht man unbekannte Zahlen, die bestimmte Bedingungen erfüllen. Diese Suche kann man mit einer Gleichung aufschreiben.

Beispiel: Eine Person möchte die gleiche Strecke hin und zurück mit dem Taxi fahren. Es gilt folgender Tarif:

Grundgebühr	3,90 €
Preis pro Kilometer	1,75 €

So erklärt man in vier Schritten, was eine Gleichung mit Variablen bedeutet

Beispiel: $(1{,}75 \cdot x + 3{,}90) \cdot 2 = 49{,}80$

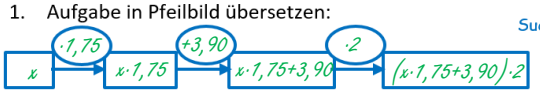
1. Der Term / die Zahl rechts vom Gleichheitszeichen steht für ...den Gesamtpreis für beide Fahrten.
2. Das x steht für.... die einmal gefahrene Strecke in km.
3. Der Term links vom Gleichheitszeichen steht für... den Gesamtpreis für beide Fahrten; die Fahrtkosten und die Grundgebühr.

   Im Term nimmt man diese Rechenart, weil... 2 mal gefahren wird; für jeden Kilometer einmal der Kilometerpreis 1,75€ bezahlt werden muss; einmalig 3,90€ Grundgebühr anfallen.
4. Man schreibt zwischen die Terme/Zahlen ein Gleichheitszeichen, um auszudrücken.... dass auf beiden Seiten das Gleiche steht, der Gesamtpreis.

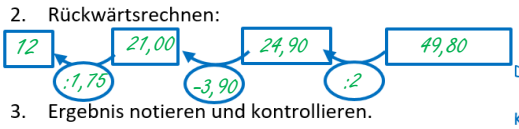
So kann man unbekannte Zahlen finden, indem man rückwärts rechnet

Pfeilbild:

1. Aufgabe in Pfeilbild übersetzen:



2. Rückwärtsrechnen:



3. Ergebnis notieren und kontrollieren.

A: Die Person fährt 12 km.

Einfachere Gleichungen suchen

Suche x, so dass gilt

$(1{,}75 \cdot x + 3{,}90) \cdot 2 = 49{,}80$

$1{,}75 \cdot x + 3{,}90 = 24{,}90$

$1{,}75 \cdot x = 21{,}00$

$x = 12$

Die unbekannte Zahl ist: $x = 12$

Kontrolle: $(12 \cdot 1{,}75 + 3{,}90) \cdot 2 = 49{,}80$

Dazu kann man Variablen als Unbekannte gebrauchen

(streiche durch, was nicht passt)

~~Die Variable steht immer für alle Zahlen.~~

Die Zahl, die ich noch suche, schreibe ich erst mal als Unbekannte x.

Mit Variablen kann man Fragen in Form von Gleichungen formulieren. Z. B. drückt $(1{,}75 \cdot x + 3{,}90) \cdot 2 = 49{,}80$ eine Frage aus.

Deine Erklärung: Eine Variable als Unbekannte drückt eine Frage aus. Für welche Zahl x stimmt die Gleichung? Sie steht in einer Gleichung für eine festgelegte Zahl, die noch gefunden werden muss. Da ich die Zahl noch nicht weiß, schreibe ich sie erstmal als Unbekannte x. Durch Rückwärtsrechnen kann ich dann herausfinden, für welche Zahl x steht.

Baustein D – Aufgabe 12

Kompetenz: **K1c)** Veränderliche und Unbekannte explizit unterscheiden

Hinweise: Damit die Lernenden solidere Variablenvorstellungen ausbilden, werden die Veränderliche und die Unbekannte explizit miteinander vergleichen. Dies soll die Lernenden dabei unterstützen, später situationsangemessen die richtige Deutung zu aktivieren. Das Erklärvideo dient hier als Sprachvorbild und hilft den Lernenden, ihre über die Baustein A-C hinweg aufgebauten Vorstellungen zu sortieren. (Lösungsvorschlag für Aufgabe 12c: Speicherkiste D ist auf der folgenden Seite)

Impulse: Erklärt mal: Wie müsste man denn die Tabelle verändern, sodass man da tatsächlich die Unbekannte sehen kann?

Lösungs-vorschlag:

D Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden

12 Veränderliche oder unbekannte Fahrzeiten vergleichen

E-Scooter: 0,15 € pro Minute und 1 € für's Entsperren

Till: In meinem Term 0,15 · x + 1 ist die Variable x echt variabel, nämlich eine veränderliche Fahrzeit. Und der Term ist auch variabel, also schreib ich y = 0,15 · x + 1.

Maja: Eigenartig, in der Gleichung 0,15 · x + 1 = 3,10 ist x nicht mehr veränderlich, sondern fest.

a) Erkläre in eigenen Worten, was Till und Maja meinen.

Till meint, dass die Variable alle möglichen Zahlen sein kann. Genauso kann dann bei dem Gesamtpreis eine jede beliebige Zahl herauskommen. Deswegen nutzt er die beiden Variablen x und y (wobei der Gesamtpreis y von der Fahrzeit x abhängig ist). Er betrachtet daher die Variable als Veränderliche.
Maja dagegen sagt, dass in ihrer Gleichung eine feste Zahl als Gesamtpreis vorgegeben ist. In ihrem Fall ist dann auch die Fahrzeit x nicht mehr beliebig wählbar, sondern festgelegt, weil ja der Gesamtpreis auch schon feststeht. Für x muss die Fahrzeit gefunden werden, bei der als Gesamtpreis 3,10€ herauskommt.

b) Nutze das Video, um deine Erklärung zu überprüfen

c) Siehe nächste Seite

d) Josef: Ich versteh den Unterschied zwischen Veränderlicher und Unbekannter nicht! In y = 0,15 · x + 1 kenne ich das x doch auch nicht. Wieso ist x da veränderlich und nicht unbekannt?

Hilf Josef dabei, den Unterschied besser zu verstehen.

- Erkläre mit der Tabelle rechts: Wieso ist x in y = 0,15 · x + 1 veränderlich?
- Was müsste man ändern, damit x eine unbekannte Zahl beschreibt? Erkläre, warum x dann eine Unbekannte ist.

Tag	Fahrzeit (min)	Kosten reine Fahrzeit (€)	Gesamtkosten Term (€)
16. Mai	20	20 · 0,15	20 · 0,15 + 1
19. Mai	12	12 · 0,15	12 · 0,15 + 1
24. Mai	27	27 · 0,15	27 · 0,15 + 1
25. Mai	18	18 · 0,15	18 · 0,15 + 1
29. Mai	33	33 · 0,15	33 · 0,15 + 1
02. Juni	100	100 · 0,15	100 · 0,15 + 1
Für jede beliebige Fahrzeit	x	x · 0,15	x · 0,15 + 1

Lieber Josef, ***in y = 0,15 · x + 1 ist x veränderlich***, *weil x dort alle möglichen Zahlen beschreibt, alle Zahlen aus der Tabelle und auch sonst alle, die du dir jemals ausdenken kannst. Das y sagt, dass kein Gesamtpreis bekannt ist. Also steht x für jede beliebige Zahl.*

x ist eine Unbekannte, *wenn man einen Gesamtpreis hat, den man bezahlen muss. Für einen feststehenden Gesamtpreis kann man herausfinden, wie lange man fahren kann, um diesen Gesamtpreis am Ende zahlen zu müssen. Die Minutenzahl x ist dann festgelegt, weil der Gesamtpreis festgelegt ist. Wir müssen dann erst noch ausrechnen, welche Zahl genau x ist, bspw. durch Rückwärtsrechnen. Also ist x noch unbekannt und wir müssen die unbekannte Zahl finden.*

Das ist der ***Gegensatz zur Veränderlichen***, *bei der wir gar keine Zahl suchen. Bei der Veränderlichen steht einfach für alle Zahlen, keine ist festgelegt. Wir wollen x also gar nicht genauer kennenlernen.*

Baustein D – Aufgabe 12c: Speicherkiste D füllen

Hinweise: In dieser Speicherkiste werden wichtige Sprachmittel, visuelle Anker und typische Aufgabensituationen der beiden Variablen-Deutungen kontrastierend gegenübergestellt. Zudem wird die Idee kleiner Geschichten angebahnt (Laras Training).

Impulse: (Hilfsimpuls:) Wie müsste man denn die Lara-Geschichte verändern, sodass nach der Unbekannten gefragt wird?

Lösungsvorschlag:

c) Fülle die Übersicht in **Speicherkiste D** aus.
Schneide dafür die Textfelder aus, sortiere sie zur passenden Verwendungsweise der Variable, und vervollständige die Textfelder, wenn nötig.

Speicherkiste D: Variable als Veränderliche und Unbekannte

Diese Verwendungsweisen von Variablen lassen sich unterscheiden

Variable: x

Variable als Veränderliche

Man kann eine Zahl für die Variable einsetzen, aber es ist keine bestimmte Zahl gesucht.

Es geht nicht darum, eine versteckte Zahl zu finden, sondern einen Zusammenhang allgemein zu beschreiben.

Man beschreibt damit Rechnungen für alle möglichen Zahlen.

1 · 0,15 + 1	21 · 0,15 + 1	41 · 0,15 + 1	61 · 0,15 + 1	81 · 0,15 + 1
2 · 0,15 + 1	22 · 0,15 + 1	42 · 0,15 + 1	62 · 0,15 + 1	82 · 0,15 + 1
3 · 0,15 + 1	23 · 0,15 + 1	43 · 0,15 + 1	63 · 0,15 + 1	83 · 0,15 + 1
4 · 0,15 + 1	24 · 0,15 + 1	44 · 0,15 + 1	64 · 0,15 + 1	84 · 0,15 + 1
5 · 0,15 + 1	25 · 0,15 + 1	45 · 0,15 + 1	65 · 0,15 + 1	85 · 0,15 + 1
6 · 0,15 + 1	26 · 0,15 + 1	46 · 0,15 + 1	66 · 0,15 + 1	86 · 0,15 + 1
7 · 0,15 + 1	27 · 0,15 + 1	47 · 0,15 + 1	67 · 0,15 + 1	87 · 0,15 + 1
8 · 0,15 + 1	28 · 0,15 + 1	48 · 0,15 + 1	68 · 0,15 + 1	88 · 0,15 + 1
9 · 0,15 + 1	29 · 0,15 + 1	49 · 0,15 + 1	69 · 0,15 + 1	89 · 0,15 + 1
10 · 0,15 + 1	30 · 0,15 + 1	50 · 0,15 + 1	70 · 0,15 + 1	90 · 0,15 + 1
11 · 0,15 + 1	31 · 0,15 + 1	51 · 0,15 + 1	71 · 0,15 + 1	91 · 0,15 + 1
12 · 0,15 + 1	32 · 0,15 + 1	52 · 0,15 + 1	72 · 0,15 + 1	92 · 0,15 + 1
13 · 0,15 + 1	33 · 0,15 + 1	53 · 0,15 + 1	73 · 0,15 + 1	93 · 0,15 + 1
14 · 0,15 + 1	34 · 0,15 + 1	54 · 0,15 + 1	74 · 0,15 + 1	94 · 0,15 + 1
15 · 0,15 + 1	35 · 0,15 + 1	55 · 0,15 + 1	75 · 0,15 + 1	95 · 0,15 + 1
16 · 0,15 + 1	36 · 0,15 + 1	56 · 0,15 + 1	76 · 0,15 + 1	96 · 0,15 + 1
17 · 0,15 + 1	37 · 0,15 + 1	57 · 0,15 + 1	77 · 0,15 + 1	97 · 0,15 + 1
18 · 0,15 + 1	38 · 0,15 + 1	58 · 0,15 + 1	78 · 0,15 + 1	98 · 0,15 + 1
19 · 0,15 + 1	39 · 0,15 + 1	59 · 0,15 + 1	79 · 0,15 + 1	99 · 0,15 + 1
20 · 0,15 + 1	40 · 0,15 + 1	60 · 0,15 + 1	80 · 0,15 + 1	100 · 0,15 + 1

x · 0,15 + 1

Das Bild passt gut zur Variable als Veränderliche,
weil... die Veränderliche für alle Zahlen steht, die man sich denken kann. Der Term mit Veränderlicher steht dann für alle möglichen Rechnungen, die man jemals rechnen könnte.

Variable als Unbekannte

x steht für eine festgelegte Zahl, die man aber noch nicht kennt.

Sie kann in Termen auftauchen.

Die Zahl wird dargestellt durch Buchstaben.

$x \cdot 0{,}15 + 1 \overset{?}{=} 3{,}10$

Das Fragezeichen passt gut zur Variable als Unbekannte,
weil... in Gleichungen mit Unbekannter immer eine Frage stellt, z.B. wie viele Minuten kann ich mit 3,10€ E-Scooter fahren?

Situation: Taxi
$y = 4 + 1{,}5 \cdot x + 2{,}5$

Situation: Taxi
Preise

Grundgebühr:	4,00 €
Preis pro km:	1,65 €
Trinkgeld:	2,50 €

Situation: Taxi
$4 + 1{,}5 \cdot x + 2{,}5 = 13$

Situation: Laras Training

Lara trainiert für einen Halbmarathon. Dafür läuft sie für jedes Training zuerst 1,5 km, um sich zu erwärmen. Dann läuft sie eine beliebige Anzahl von Runden auf dem Sportplatz. Eine Runde ist 400 m lang.

Aufgabe zur Situation: Laras Training

Lara läuft jeden Tag eine andere Anzahl von Runden. Sie möchte nicht immer wieder neu darüber nachdenken, wie viele Kilometer sie insgesamt gelaufen ist. Deshalb möchte Lara einen Term für die Gesamtstrecke für jedes beliebige Training aufstellen. Wie lautet ein Term?
Antwort: $1{,}5 + x \cdot 0{,}4$

Heute steht in Laras Trainingsplan, dass sie insgesamt 4,3 km laufen soll. Lara möchte nun wissen, wie viele Runden sie nach dem Erwärmen noch laufen muss, um ihr Ziel zu erreichen. Wie lautet eine passende Gleichung mit der man die Rundenzahl herausfinden kann? Antwort: $1{,}5 + x \cdot 0{,}4 = 4{,}3$

Baustein D – Aufgabe 13

Kompetenz: **K1c)** Veränderliche und Unbekannte explizit unterscheiden
K2) Gleichungen deuten als Beziehungen zwischen Größen, d. h. deuten
a) der Größen, Variablen, **b)** Operationen, **c)** Teilterme als einer Größe, **e)** des Gleichzeichens

Hinweise: Das Umdeuten von einer Variablen-Deutung zur anderen ist für Lernende besonders herausfordernd, weshalb in 13a explizit zum Thema wird. Durch das erzählen kleiner Geschichten in 13b dient vor allem dazu, dass die Lernenden denn Sinn der Nutzung von Variablen unterscheiden: etwas verallgemeinern vs. etwas Unbekanntes herausfinden. Deshalb sollte darauf geachtet werden, dass dieser Sinn in den Geschichten auch thematisiert wird: Wobei hilft die Veränderliche, wobei die Unbekannte in der jeweiligen Geschichte?

Impulse: (Beim Vorstellen der Geschichten:) Lest euch mal die Geschichte durch. Geht es um die Veränderliche oder um die Unbekannte? Woran erkennt ihr das? Wofür wird die Variable in der Situation gebraucht (etwas verallgemeinern oder etwas Unbekanntes herausfinden)?

Lösungsvorschlag:

13 Veränderliche oder Unbekannte in verschiedenen Situationen

a) Erkläre, was Maja beobachtet mit Hilfe der Rechnung:

E-Scooter: 0,10 € pro Minute und 1 € für's Entsperren

Für jede Fahrzeit kann man die Gesamtkosten so ausrechnen: $y = 0{,}10 \cdot x + 1$.

Wie lange bin ich gefahren, wenn ich 2,30 € bezahle?
Dafür rechne ich:
$0{,}10 \cdot x + 1 = 2{,}30$
$0{,}10 \cdot x = 1{,}30$
$x = 13$

Ob das x alle möglichen Zahlen beschreibt oder nur eine unbekannte Zahl, das kann sich ja von einem Schritt zum nächsten ändern!
Maja

Maja erkennt, dass man in dem ersten Schritt einen allgemeinen Term bzw. eine allgemeine Gleichung für alle möglichen Zahlen aufstellen kann. Hier steht das x jede beliebe Fahrzeit. Im nächsten Schritt ist dann der Gesamtpreis 2,30€ festgelegt. Damit ist dann aber auch die Fahrzeit festgelegt, weil man ja nur eine bestimmte Zeit fahren darf, wenn man genau 2,30€ bezahlen will.
Wofür das x steht kann sich in einer Aufgabe verändern. Zuerst ist es eine Veränderliche und steht für alle möglichen Zahlen und dann ist es nur noch eine unbekannte Zahl, und die man soll man herausfinden.

b) Überlege zu jeder der Variablen in den Kästen
- eine Situation und Gleichung, in der die Variable eine *Veränderliche* ist und
- eine Situation und Gleichung, in der die Variable eine *Unbekannte* ist.

Erklärt, warum es in eurer Geschichte hilfreich ist, eine Variable zu nutzen.

n ist eine Anzahl von Lernenden Inspiration: Eintritt ins Museum mit Lehrkräften	*t* ist eine Minutenzahl Inspiration: Auslandstelefonate mit Grundgebühr

z.B.: Zwei Lehrerinnen der 8. Klasse gehen jedes Jahr mit ihren Schüler*innen in das gleiche Museum. Der Eintritt kostet für Erwachsene 5€, für Schüler*innen 3€.
Veränderliche: Die Lehrerinnen wollen nicht jedes Jahr neu rechnen müssen. Stelle einen Term auf, bei dem sie nur noch die Anzahl der Lernenden in der Klasse einsetzen müssen, um den Preis herauszufinden. $[2 \cdot 5 + x \cdot 3]$
Unbekannte: In der Klassenkasse sind noch 76€. Für wie viele Lernende mit den beiden Lehrerinnen reicht das Geld?
$[2 \cdot 5 + x \cdot 3 = 76]$

z.B.: Mias beste Freundin ist zur Zeit für einen Schüleraustausch in den USA. Um sie anzurufen muss Mia 1,50€ Grundgebühr und 0,15€ pro Minute bezahlen.
Veränderliche: Die beiden Mädchen telefonieren häufiger. Wie kann Mia schnell berechnen wie viel sie bezahlen muss?
$[1{,}50 + x \cdot 0{,}15]$
Unbekannte: Mia ist gerade knapp bei Kasse. Sie möchte für das Telefonat nicht mehr als 3€ ausgeben. Wie lange können die beiden Mädchen telefonieren, wenn Mia anruft? $[1{,}50 + x \cdot 0{,}15 = 3]$