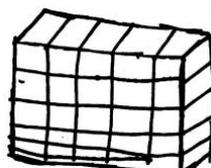


Didaktischer Kommentar zur Unterrichtseinheit für Klasse 5/6:



Volumen von Quadern – Messen und Rechnen mit Würfeln

$2 \cdot 12 = 24$
 $4 \cdot 6 = 24$
 $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$
 $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$
 $(2 \cdot 3 \cdot 4 = 24)$
 $3 \cdot 8 = 24$
 $1 \cdot 24 = 24$

4 runter 6 nach l
8 runter 3 nach l
12 runter 2 nach l
24 runter 1 nach l
2 nach oben 4 nach unten 3 nach links
2 nach oben 2 nach unten 6 nach links



Dieses Material wurde durch Susanne Prediger und Claudia Ademmer konzipiert und kann unter der Creative Commons Lizenz BY-SA-NC: Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen – nicht kommerziell 4.0 International weiterverwendet werden.

Zitierbar als

Prediger, Susanne & Ademmer, Claudia (2018). Volumen von Quadern – Messen und Rechnen mit Würfeln. Sprach- und fachintegriertes Fördermaterial und Didaktischer Kommentar. Online verfügbar als Open Education Resource unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de/100

Projektherkunft

Dieses fach- und sprachintegrierte Fördermaterial ist entstanden im Rahmen des Projekts SiMa Thüringen und wurde fertig gestellt im Projekt Mathe sicher können, beides unter Projektleitung von Susanne Prediger.

Bildrechte

Alle Fotos sind selbst erstellt von den Autorinnen, die Bildrechte für die Kinderzeichnungen verbleiben bei Andrea Schink. Die Kinderprodukte der Titelseite stammen aus einer Erprobung.

Steckbrief zur Unterrichtseinheit:

Klassenstufe	Klasse 5 / 6, auch für inklusive Klassen
Dauer	2-3 Stunden
Material	Je 24 Holzwürfel für 1-4 Kinder (Größe idealerweise etwa 1 cm ³)

Worum geht es mathematisch beim Volumen von Quadern?

Viele Lernende können Flächeninhalte und Volumen nicht anders beschreiben als z.B. „Länge mal Breite eben“. Weder die zugrundeliegende Idee des Messens noch die zugrundeliegenden multiplikativen Strukturen können sie begründen. Entsprechend fragil ist die Nutzung der Formel. Auch im Unterricht werden Formeln wie $F = a \cdot b$ oder $V = h \cdot l \cdot t$ oft nur erklärt, indem die Variablen benannt werden („l ist die Länge, h ist die Höhe, t die Tiefe“), ohne die Operation zu berücksichtigen („Warum gerade multiplizieren statt addieren?“).

Das Unterrichtsmaterial zeigt für die Volumenbestimmung von Quadern, wie das Verständnis gestärkt werden kann. Dazu sollen die Kinder folgendes lernen:

- *Konzept des Volumens über die Idee des Messens:* Das Volumen eines Quaders gibt an, wieviel (Luft, Wasser, ...) in den Quader hineinpasst. Wenn man das Volumen eines Quaders in Kubikzentimetern messen will, fragt man, wie viele Kubikzentimeter-Würfel in den Quader hineinpassen.
- *Formel kennen:* Man kann für das Volumen eines Quaders immer Länge mal Breite mal Höhe rechnen. (Ganz am Ende)
- *Formel inhaltlich begründen:* Man kann für das Volumen eines Quaders immer Höhe mal Länge mal Breite rechnen, denn die Länge gibt an, wie viel Würfel in einer Reihe sind. Die Breite gibt an, wie viel Reihen der Quader hat, also zum Beispiel vier 2er Reihen. Dann

berechnet man die erste Schicht der vier 2er-Reihen durch $4 \cdot 2$. Die Höhe gibt an, wie viel Schichten der Quader hat, wenn er zum Beispiel 3 Schichten hat, rechnet man $V = 3 \cdot 4 \cdot 2$.

- *Zählen in Bündeln abkürzen durch Multiplizieren:* Vier 2er-Reihen kann man mit $4 \cdot 2$ Kubikzentimeterwürfel berechnen.
- *Verschieben der Einheiten:* Statt $3 \cdot 4 \cdot 2 \text{ cm}^3$ kann man auch schreiben $3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}$, doch vorstellen muss man sich eigentlich die Würfel mit Kubikzentimeter.

In der Unterrichtseinheit nähern sich die Kinder dem Volumen des Quaders handelnd und selbstdifferenzierend. Werden die Kinder aufgefordert, aus genau 24 Würfeln möglichst viele Quader zu bauen, dann finden viele selbständig zum strukturierten Zählen in Bündeln und entdecken die Volumenformel. Wie bei vielen handlungsorientierten Zugängen kommt es jedoch darauf an, das Handeln durch diejenigen Sprachhandlungen und Sprachmittel zu begleiten, die das Übersetzen des Handelns in formale Mathematik möglichst gut unterstützen (Schulz & Wartha 2017, S. 63). Dabei spielen die Sprachmittel „vier 3er Reihen“ (Multiplikation) und „wie oft passt es hinein“ (Ausmessen) eine herausragende Rolle (vgl. Abschnitt 3.1).

Tabelle 1: Übersicht zu Teilzielen, Sprachhandlungen und Sprachmittel für Lernpfade zur Volumenbestimmung des Quaders (Prediger & Ademmer i.V.)

Fachliches (Teil-)Lernziel	Sprachhandlung und dazu notwendige Sprachmittel (<i>wichtigste Satzbausteine kursiv gedruckt</i>)
Verstehensgrundlagen vorangehender Jahrgänge	
Fachwort Quader kennen	Wort Quader erklären: Ein Quader ist ein Körper mit 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen, die Flächen sind alle Rechtecke.
Multiplikationen als Zählen in Bündeln	Bedeutung der Multiplikation erklären: 3 · 4, das sind zum Beispiel <i>drei 4er-Gruppen</i> Ich zähle nicht alles einzeln, sondern ich zähle in Gruppen: drei 4er-Gruppen, das sind 3 · 4
Neuer Inhalt	
Konzept Volumen über die Idee des Messens verstehen	Bedeutung von Volumen erklären: Das Volumen / der Rauminhalt eines Quaders gibt an, <i>wieviel</i> (Luft, Wasser, ...) in den Quader <i>hineinpasst</i> . Um das Volumen in Kubikzentimetern zu messen, fragt man, wie viele Kubikzentimeter-Würfel <i>hineinpassen</i> .
Länge, Breite, Höhe mit Reihen und Schichten verknüpfen	Quader formal beschreiben: Der Quader ist 4 cm <i>lang</i> , 2 cm <i>breit</i> und 3 cm <i>hoch</i> . Quader bedeutungsbezogen beschreiben: Die untere Reihe ist 4 Würfel lang. Jede <i>Schicht</i> hat <i>zwei 4er-Reihen</i> . Der Quader hat 3 Schichten.
Mit Reihen und Schichten das Volumen bestimmen	Erläutern des strukturierten Zählens unter Nutzen der multiplikativen Struktur: In jeder Schicht sind <i>zwei 4er-Reihen</i> , also 2 · 4 Würfel. Es sind 3 Schichten von je 2 · 4 Würfeln, also <i>drei 8er-Schichten</i> , d.h. 3 · 8 Würfel
Volumenformel entdecken / nutzen Volumen = Höhe mal Breite mal Länge	Konkreten Rechenweg erläutern: Für den Quader mit 4 cm <i>Länge</i> , 2 cm <i>Breite</i> und 3 cm <i>Höhe</i> kann ich das Volumen berechnen durch Multiplizieren: $V = 3 \cdot 2 \cdot 4 \text{ cm}^3$. Rechenweg allgemein erläutern: Man kann das Volumen im Quader berechnen durch Länge mal Breite mal Höhe., also $V = h \cdot b \cdot l$
Volumenformel verstehen d.h. mit strukturiertem Zählen verknüpfen (Darstellungs- vernetzung)	Volumenformel inhaltlich begründen: Man kann für das Volumen eines Quaders immer Länge mal Breite mal Höhe rechnen, denn die <i>Länge</i> gibt an, <i>wie viel Würfel in einer Reihe</i> sind. Die <i>Breite</i> gibt an, <i>wie viel Reihen die Grundsicht hat</i> , also z.B. <i>zwei 4er-Reihen</i> . Dann berechnet man die Grundsicht der zwei 4er-Reihen durch 2 · 4. Die <i>Höhe</i> gibt an, <i>wie viel Schichten</i> der Quader hat, wenn er z.B. 3 Schichten hat, rechnet man $V = 3 \cdot 2 \cdot 4$. Das geht genauso für jede beliebige Länge von Reihen und Anzahl von Reihen und Schichten.
Kombinatorische Ausschöpfung	Vollständigkeit der gefundenen Quader begründen: Alle Quader-Volumen berechnet man mit Länge der Reihen mal Zahl der Reihen mal Zahl der Schichten, das heißt, man sucht alle Malaufgaben zur 24: Dazu kann man mit dem kleinsten Faktor anfangen und immer größer werden. Wenn man so systematisch vorgeht, gibt es keine weiteren Quader. $24 =$ $1 \cdot 1 \cdot 24$ $1 \cdot 2 \cdot 12$ $1 \cdot 3 \cdot 8$ $1 \cdot 4 \cdot 6$ $2 \cdot 2 \cdot 6$ $2 \cdot 3 \cdot 4$

Differenzierungsmöglichkeiten

Zur Differenzierung in inklusiven Klasse werden für einzelne Lernendengruppen differenzierte Schwerpunkte zu setzen, wie Tab. 2 in der Übersicht zeigt (Prediger & Ademmer 2019).

Tabelle 2: Differenzierte fachliche und sprachliche Lernziele (FS = Förderschwerpunkt)

Gruppe mit Beispiel-Lernenden und Anzahl in der Klasse		Differenzierte Schwerpunkte für verschiedene Lernendengruppen				
		Potentialgruppe	Starke Gruppe	Mittelgruppe	Fördergruppe	FS Geistige Entw.
Fachliches (Teil-)Lernziel	Sprachhandlungen					
Fachwort Quader kennen	Wort Quader erklären	(sicher beherrscht)	(sicher beherrscht)	(kurz reaktivieren)	reaktivieren	kann er mit Hilfe
Multiplikationen als Zählen in Bündeln	Bedeutung der Multiplikation erklären	(sicher beherrscht)	(kurz reaktivieren)	reaktivieren	wieder erarbeiten	zentrales Lernziel erarbeiten
Konzept Volumen über die Idee des Messens verstehen	Bedeutung von Volumen erklären	kurz einführen	kurz einführen	erarbeiten	erarbeiten	anbahnen
Länge, Breite, Höhe mit Reihen und Schichten verknüpfen	Quader bedeutungsbezogen beschreiben	selbst entdecken	selbst entdecken	selbst entdecken	zentrales Lernziel mit Hilfe erarbeiten	
Mit Reihen und Schichten das Volumen bestimmen	Erläutern des Zählens mit multiplikativer Struktur	selbst entdecken & verbalisieren	selbst entdeckt, mit Hilfe verbalisieren	mit Hilfe erarbeiten und verbalisieren	zentrales Lernziel mit Hilfe erarbeiten	
Volumenformel verstehen	Volumenformel inhaltlich begründen	selbst entdecken & verbalisieren	zentrales Lernziel erarbeiten	zentrales Lernziel erarbeiten	anbahnen	
Volumenformel entdecken / nutzen	Rechenweg erläutern	selbst entdecken & verallgemeinern	erarbeiten & verbalisieren	erarbeiten		
Kombinatorische Ausschöpfung	Vollständigkeit der gefundenen Quader begründen	selbst entdecken	nach Erarbeitung selbst entdecken	ggf. anbahnen		

Literatur zum Weiterlesen

- Prediger, S. (2009). Quader bauen aus 24 Würfeln - Kinder auf dem Weg zur Volumenformel. *Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht. Primar, 1*(1), 8-12.
- Prediger, S. & Ademmer, C. (2019, im Druck). Sprachbildender Vorstellungsaufbau zu Flächeninhalt und Volumen in Klasse 5/6. In S. Prediger (Hrsg.). *Sprachbildender Mathematikunterricht – Ein forschungsbasiertes Praxisbuch*. Cornelsen: Berlin.

Prediger, S. & Ademmer, C. (2019, im Druck). Gemeinsam zum Volumen von Quadern: Eine inklusive und sprachensible Unterrichtsreihe. Erscheint in *Mathematik lehren*.