

Didaktischer Kommentar zur Unterrichtseinheit Klasse 5-7:

Muster und Verallgemeinern in Päckchen und beim Zaubern



Zitierbar als

Dieses Material wurde durch Susanne Prediger, Uli Brauer und Alexandra Dohle konzipiert und kann unter der Creative Commons Lizenz BY-SA: Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International weiterverwendet werden.

Prediger, Susanne, Brauner, Uli & Dohle, Alexandra (2019). Muster und Verallgemeinern in Päckchen und beim Zaubern. Didaktischer Kommentar zum sprach- und fachintegrierten Unterrichtsmaterial. Open Educational Resources auf sima.dzlm.de/sima.dzlm.de/um/5-004

Projektherkunft

Dieses fach- und sprachintegrierte Fördermaterial ist entstanden im Rahmen des Projekts Sima Thüringen (gefördert durch das Thüringer Ministerium für Bildung, Jugend und Sport – TMBJS) und wird fertig gestellt im Projekt Mathe sicher können, beides unter Projektleitung von Susanne Prediger.

Mögliche

Umsetzungen:

Zwei alternative Lernpfade bieten sich an:

- erst Päckchen 1, 2, 3, 4, Speicherkiste, 5, danach Zaubern 6, 7, ggf. 8
- Start mit Zaubern: 6, 7, dann Hilfe durch Päckchen 2, 3, 4, Speicherkiste, dann differenziert 1, 5 für Schwächere, 8 für Stärkere

Steckbrief zur Unterrichtseinheit

Klassenstufe	Klasse 5-7, auch für inklusive Klassen
Dauer	2-3 Stunden
Material	Münzen oder Plättchen, für jedes Kind 6-10

Worum geht es mathematisch? Erfassen allgemeiner Zusammenhänge als Algebra-Vorbereitung

Das Erfassen allgemeiner Zusammenhänge ist einer von fünf Strängen der Algebra. Es ist der Strang, der die schwierigste Grundvorstellung der Variable umfasst, die Variable nicht als Unbekannte, sondern als Unbestimmte, d.h. als allgemeine Zahl (Malle 1993). Das Umgehen mit Verallgemeinerungen und allgemeinen Zahlen kann in Klasse 1-7 bereits vorbereitet werden, bevor Variablen als Symbole eingeführt werden, in diesem Sinne ist die Einheit eine Vorbereitung auf die Algebra. Zum Erfassen allgemeiner Zusammenhänge gehören:

Langfristiger Lernpfad hin zum Erfassen allgemeiner Zusammenhänge (aus Prediger & Götze 2017)

Kl. 1-2	<ul style="list-style-type: none"> • konkrete Muster strukturieren und strukturiert zählen • konkrete Muster strukturiert zählen und mit Zahlenterm als Rechenanweisung beschreiben (operationale Sicht) • allgemeine Muster mit Termen mit generischen Zahlen beschreiben (Term als Beschreibungsmittel in relationaler Sicht) • Zahlenterme in Sachzusammenhängen interpretieren
zusätzlich in Kl. 3-6	<ul style="list-style-type: none"> • allgemeine Muster mit Wortvariablen verbal beschreiben • allgemeine Muster durch Terme mit generischen Zahlen beschreiben (Zahlenterm als Beschreibungsmittel) • generische Zahlenterme mit zunehmend komplexeren Termstrukturen aufstellen • allgemeine Muster graphisch generisch oder mit Wortvariablen begründen

zusätzlich in Kl. 7-8	<ul style="list-style-type: none"> • allgemeine Muster in verschiedenen Darstellungen begründen • allgemeine Zusammenhänge mit Variablentermen beschreiben (Variable als Unbestimmte) • funktionale Zusammenhänge beschreiben (Variable als Veränderliche und Abhängige)
------------------------------	---

Die Aufgaben des vorliegenden Unterrichtsmaterials widmen sich dem grau markierten Teil des Lernpfads. Dieser hat sich bei sprachlich schwachen Lernenden als der herausforderndste der Algebra-Stränge herausgestellt (MacGregor & Price 1999). Daher widmet sich dieser Abschnitt seiner prä-algebraischen Anbahnung in Klasse 4-6, noch bevor die Variable explizit formal eingeführt wird. Dies erfolgt sowohl in der Untersuchung von Mustern in Aufgabenpäckchen als auch in der Untersuchung eines Zaubertricks, der gefundenen Muster ausnutzt.

Identifizieren der sprachlichen Anforderungen in dem Themenfeld

Um die Zusammenhänge zu erfassen, müssen sie allgemein *beschrieben* und dann auch *begründet* werden. Dies erfolgt in Klasse 5-7 noch ohne Variable, statt dessen sind Wortvariablen (die erste Zahl, die Punktzahl, ...) oder generische Zahlen und Wenn-Dann-Sätze wichtig. Am Beispiel des Päckchens und des Zaubertricks führt die folgende Tabelle die wichtigsten Sprachhandlungen und –mittel auf. Entscheidend sind die Unterschiede zwischen Beschreiben und Begründen und zwischen beispielgebundenem und allgemeinem Begründen.

Fachliches (Teil-)Lernziel	Sprachhandlung und dazu notwendige Sprachmittel <i>(wichtigste Satzbausteine kursiv gedruckt)</i>
Rechen- vorschriften erfassen	Erläutern der Rechenvorschrift: (formal- oder bedeutungsbezogen) <ul style="list-style-type: none"> • Zaubertrick: Die 3 / 5 wird um die Anzahl der Münzen der linken / rechten Hand <i>vervielfacht</i>. Diese Punktzahlen <i>fasst man zusammen</i>. • 2. Päckchen: Im ersten Teilterm wird <i>immer mit 3 multipliziert</i>, im zweiten Teilterm <i>immer mit 5</i>. Die beiden <i>Teilprodukte</i> werden <i>addiert</i>.
Muster erken- nen und ggf. fortführen	Beschreiben des entdeckten Musters (über Veränderung): <ul style="list-style-type: none"> • Ergebnisse im Zaubertrick / 2. Päckchen sind 25, 23, 21, 19, ... • Das Endergebnis ist höchstens 25 und mindestens 15. Es wird <i>immer um zwei kleiner</i>. • Im ersten Teilterm wird die erste Zahl <i>immer um 1 größer</i>, im zweiten Teilterm wird die erste Zahl <i>immer um 1 kleiner</i>.
Zusammen- hänge im Muster erkennen	Beschreiben der Zusammenhänge im entdeckten Muster: <ul style="list-style-type: none"> • Beispielgebundene Beschreibung: Wenn z.B. alle Münzen in der rechten Hand liegen, sind es 25 Punkte. Wenn aber drei rechts liegen, müssen die restlichen zwei links liegen, also sind es $(5-3) \cdot 2 = 2 \cdot 2$ Punkte weniger, wie im Bild. • Allgemeine Beschreibung: <i>Wenn</i> man eine Münze von rechts nach links verschiebt (oder im 2. Päckchen eine Aufgabe weitergeht), <i>dann</i> wird das Endergebnis immer um 2 kleiner.
Zusammen- hänge im Muster ver- stehen	Begründen des Zusammenhangs im entdeckten Muster mit Vorstellung: <ul style="list-style-type: none"> • Man verschiebt eine Münze von der rechten in die linke Hand. Dadurch <i>nimmt man einen 5er weg</i>, fügt aber <i>einen 3er hinzu</i>. Darum wird das Endergebnis um 2 kleiner. 
Zusammen- hänge nutzen für allgemeine Vorschriften	Formulieren der Zusammenhänge in allgemeiner Rechenvorschrift: <ul style="list-style-type: none"> • Zaubertrick: Pro Münze, die ich von rechts nach links verschiebe, werden es zwei Punkte weniger, also <i>25 minus linke Münzzahl mal 2</i>. • Päckchen: <i>25 minus erste Zahl mal 2</i>.
Weitere Ein- flussfaktoren variieren und die Wirkung untersuchen	Beschreiben der Operationen und ihrer Wirkungen aufs Muster: <ul style="list-style-type: none"> • <i>Wenn</i> man die Vervielfachten-Zahlen 3 und 5 <i>verändert</i>, <i>dann verändert sich auch die Veränderung der Punktzahlen</i>. Sie ist <i>immer genau so groß wie der Unterschied</i> zwischen der ersten und der zweiten Vervielfachungs-Zahl.

Um das Begründen zu unterstützen brauchen die Schülerinnen und Schüler nicht nur Sprachmittel zur allgemeinen Benennung der Zahlen. Vor allem brauchen sie Sprachmittel, die auf einer inhaltlichen Vorstellung fußen und gekoppelt mit entsprechenden enaktiven oder ikonischen Darstellungen zu einem echten Verständnis der allgemeinen Zusammenhänge in den Päckchen oder den Zaubertricks beitragen.

Möglicher Sprachspeicher für den Münztrick

Bei der Malaufgabe im ersten Teilterm wird die erste Zahl immer um 1 größer

Der erste Teilterm	Der zweite Teilterm	Das Ergebnis
$0 \cdot 3$	$+ 5 \cdot 5$	$= 25$
$1 \cdot 3$	$+ 4 \cdot 5$	$= 23$
$2 \cdot 3$	$+ 3 \cdot 5$	$= 21$
$3 \cdot 3$	$+ 2 \cdot 5$	$= 19$
$4 \cdot 3$	$+ 1 \cdot 5$	$= 17$

+ ein 3er + ein 5er - 2

Aus jeder Münze in der rechten Hand wird ein 5er.

Die linke Münzzahl $\cdot 3$ Die rechte Münzzahl $\cdot 5$

Die linke Hand Die rechte Hand

Die linke Münzzahl $2 \cdot 3$ Die rechte Münzzahl $3 \cdot 5$

Die Münzzahl in der rechten Hand vervielfacht die 5.

Pro Münze, die ich von rechts nach links verschiebe, werden es zwei weniger, also 25 minus linke Münzzahl mal 2.

Man nimmt einen 5er weg, fügt aber einen 3er hinzu. Darum wird das Ergebnis um 2 kleiner.

Graphisch gestützte Sprachspeicher bewähren sich, um das allgemeine Beschreiben und Begründen von Mustern zu unterstützen. Zugleich ist die Reflexion über Vollständigkeit und Allgemeinheit solcher Beschreibungen lernförderlich (Götze 2015):

- Was gehört zu einer guten Beschreibung?
- Wann haben wir es für alle Zahlen beschrieben, nicht nur für Beispiele?

Der Übergang zum Begründen gelingt nur wenigen Kindern selbständig, notwendig hierfür sind graphische Darstellungen und bedeutungsbezogene Sprachmittel (aus einem 5er wird ein 3er), mit denen man allgemein erklären kann (wie die Rechteckfelder mit den 5er- und 3er-Bündeln in der Tabelle aus der vorigen Seite: Wird ein 5er-Bündel zum 3er-Bündel, dann werden es insgesamt zwei weniger).

Auch wenn das Begründen für viele Kinder anspruchsvoll ist, sollte es thematisiert werden, damit die Kinder nicht beim beispielgebundenen Beschreiben nur an den Oberflächenstrukturen verbleiben, ohne den Zusammenhang zu verstehen. Am Beispiel der Päckchen bedeutet dies, dass die Kinder das Muster von oben nach unten Zahl für Zahl fortsetzen, die Zusammenhänge in den Aufgaben aber nicht wahrnehmen. Dazu brauchen sie einerseits andere Sprachmittel, aber auch die gemeinsame (meist von der Lehrkraft moderierte) Diskussion über diese Zusammenhänge. Nur dann wird der Lernpfad vom sprachlichen Beschreiben und Begründen zum algebraischen Verallgemeinern geebnet.

Weiterführende Literatur und Unterrichtsmaterial

- Prediger, S., Dohle, A. & Götze, D. (2020). Sprachbildender Vorstellungsaufbau für Erfassen allgemeiner Zusammenhänge in Klasse 4–6. In S. Prediger (Hrsg.), Sprachbildender Mathematikunterricht in der Sekundarstufe - ein forschungsbasiertes Praxisbuch (S. 143-147). Berlin: Cornelsen.
- Götze, D. (2015). Sprachförderung im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen.
- Prediger, S. & Götze, D. (2017). Sprachbildung als langfristige Entwicklungsaufgabe - Praktische Ansätze und ihre empirische Fundierung am Beispiel Algebra. In A. S. Steinweg (Hrsg.), Sprache und Mathematik. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2017 (S. 9-24). Bamberg: University of Bamberg Press.

Überblick zu den Aufgaben der Unterrichtseinheit

Teil / Thema	Kompetenz		Aufgaben
	Fachlich	Sprachlich	
A Muster und Verallgemeinern in schönen Päckchen	Rechenvorschrift erfassen/ erfinden	Rechenvorschrift beschreiben:	1a 2a 5a, b
	Muster des Rechenpäckchens/ Zaubertricks erkennen	Entdecktes Muster beschreiben	1b 2 b, c, d, e, 5c
	Zusammenhänge im Muster des verstehen	Zusammenhänge im entdeckten Muster konkret begründen	1c 4 5d
	Muster begründet verallgemeinern	Muster beispielgebunden begründet zusammenfassen	1d, e, f 5e, f
	Zusammenhänge in problemstrukturierten Aufgaben nutzen	Anwendung der entdeckten Zusammenhänge begründen	1g, h 5g
	Darstellungsvernetzung zwischen Term, Bild, und bedeutungsbezogener Sprache	Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungen begründen	3
B Muster und Verallgemeinern in Zaubertricks	(Un-)Systematisches Ausprobieren des Zaubertricks, Muster erkennen	Rechenvorschrift beschreiben	6
	Zusammenhänge der Darstellungsformen Term, Bild und bedeutungsbezogene Sprache verstehen	Zusammenhänge zwischen Term, Bild und bedeutungsbezogener Sprache begründen	7a
	Zusammenhänge im Muster des Zaubertricks erkennen	Entdecktes Muster beschreiben	7b
	Zusammenhänge im Muster des Zaubertricks verstehen	Zusammenhänge im entdeckten Muster konkret begründen	7c, d
	Einflussfaktoren im entdeckten Muster des Zaubertricks (systematisch) variieren und die Wirkung untersuchen	Operationen auf bestimmte Aspekte im Muster und deren Wirkung beschreiben und verallgemeinern:	8a, b, d
	Zusammenhänge zwischen ausgeübten Operationen und ihrer Wirkung verstehen	Allgemeine Zusammenhänge im entdeckten Muster begründen:	8c, e

Lösungen und Detail-Anmerkungen zum Unterrichtsmaterial

A Päckchen untersuchen und Muster beschreiben

1 Muster im Päckchen finden und nutzen (35 Minuten + 10 Minuten Reflexion)

Inhaltliches Lernziel:	Rechenvorschrift im Rechenpäckchen erfassen, Muster darin erkennen, Zusammenhänge dieses Musters verstehen, verallgemeinern und nutzen
Sprachliches Lernziel:	Rechenvorschrift und entdeckte Muster beschreiben, Zusammenhänge im Muster konkret begründen, begründet zusammenfassen und die Anwendung der entdeckten Zusammenhänge begründen
Umsetzung:	a)+b)+c)+d) EA, anschließend Vergleich von c)+d) in PA, e)+f) PA; gemeinsame Reflexion mit Fokus auf das Finden und Nutzen von Mustern in Rechenpäckchen

Impuls: Was bleibt gleich? Was verändert sich?	1 Muster in Päckchen finden und nutzen	1. Päckchen 2. Päckchen
	a) Berechnet die Aufgaben in den beiden Päckchen und schreibt die nächste Aufgabe dazu.	$3 \cdot (1 + 2) = 9$ $3 \cdot (2 + 2) = 12$ $3 \cdot (3 + 2) = 15$
	b) Beschreibt das Muster der beiden Päckchen mit Worten:	$1 - 2 + 2 = 1$ $2 - 2 + 4 = 4$ $3 - 2 + 6 = 7$ $4 - 2 + 8 = 10$ $5 - 2 + 10 = 13$ $6 - 2 + 12 = 16$
Impuls: Markiere zuerst farbig, was dir auffällt. Die Farben helfen dir beim Erklären.	<ul style="list-style-type: none"> Wie verändern sich die einzelnen Teile im Term (so nennt man auch die Aufgabe)? 	<p>Und was in dem Term gleich?</p> <p>Im ersten Päckchen ist die erste Zahl immer 3. Es wird immer dreimal eine Plusaufgabe gerechnet. In der Plusaufgabe wird die erste Zahl immer um 1 größer und es wird immer plus 2 gerechnet. Das Ergebnis wird immer um 3 größer.</p> <p>Im zweiten Päckchen wird die erste Zahl immer um 1 größer. Von der ersten Zahl wird dann immer 2 abgezogen. Die dritte Zahl wird dann immer addiert und wird in jedem Schritt um 2 größer. Das Ergebnis wird immer um 3 größer.</p>
Impuls: Schau dir zuerst nur das Ergebnis in der Klammer/ nur das Ergebnis der ersten Teilrechnung an. Warum verändert es sich so?	c) Begründet das Muster der Päckchen: Warum ändert sich das Ergebnis so, wie ihr es in b) beschrieben habt?	<p>Die erste Zahl in der Plusaufgabe wird immer um 1 größer. Es wird immer die gleiche Zahl dazugerechnet, darum werden sie zusammen immer um 1 größer. Man nimmt dann immer eine um 1 größere Zahl dreimal. Darum wird das Ergebnis immer um drei größer.</p> <p>Die erste Zahl wird immer um 1 größer und die dritte Zahl wird immer um 2 größer, darum werden sie zusammen um 3 größer. Man zieht aber immer nur 2 ab, darum wird das Ergebnis auch um 3 größer.</p>
Impuls: Welche Zahl verändert sich? Wie sieht diese Zahl bei der 1., 4., 6. und 11. Aufgabe aus?	d) Wie würde das Ergebnis der 11. Aufgabe lauten? Erklärt euch gegenseitig, wie ihr vorgegangen seid, um das Ergebnis zu bestimmen.	Im ersten Päckchen: 39, im zweiten Päckchen: 31; Individuelle Vorgehensweisen
Impuls: Welche Zahl verändert sich? Wie sieht diese Zahl bei der 1., 4., 6., 11. und 101. Aufgabe aus?	e) Wie würde das Ergebnis der 101. Aufgabe lauten? Begründet, dass ihr tatsächlich die 101. Aufgabe berechnet habt und keine andere.	Im ersten Päckchen: 309, im zweiten Päckchen 301
Impuls: Wie seid ihr vorgegangen um das Ergebnis der 101. Aufgabe zu finden? Könnt ihr das für jede Aufgabe so machen?	f) Beschreibt, wie ihr das Ergebnis einer noch höheren oder x-beliebigen Aufgabe bestimmen könnt.	Für die erste Aufgabe kann man $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3$ rechnen, für die zweite Aufgabe kann man $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3$ rechnen für die 101. Aufgabe kann man $101 \cdot 3 + 2 \cdot 3$ rechnen. Für eine x-beliebige Aufgabe rechnet man also die x-beliebige Zahl $\cdot 3 + 2 \cdot 3$ Das Ergebnis ist in der ersten Aufgabe 1 und wird dann immer um 3 größer. In der zweiten Aufgabe ist es einmal um 3 größer geworden. In der 101. Aufgabe ist es schon 100mal um 3 größer geworden. Für eine x-beliebige Aufgabe ist das Ergebnis also genau einmal weniger als x-beliebige-mal um 3 größer als 1 geworden.
Impuls: Wie verändert sich das Ergebnis? Wie würde es sich weiterverändern? Trifft man so 7 und 64?	g) Können 7 oder 64 Ergebnisse des ersten Päckchens sein? Begründet eure Antwort.	Im ersten Päckchen wird immer dreimal das Ergebnis aus einer Zahl + 2 genommen. Alle Ergebnisse müssen darum ein Vielfaches von 3 sein. 7 und 64 sind keine Vielfachen von 3. Darum können 7 und 64 keine Ergebnisse des Päckchens sein.
Impuls: Wie verändert sich das Ergebnis? Wie würde es sich weiterverändern? Welche Zahlen kann man treffen?	h) Findet eine Zahl zwischen 100 und 200, die ein Ergebnis aus dem ersten Päckchen ist. Warum ist sie ein Ergebnis aus dem Päckchen? Begründet eure Antwort.	Alle Ergebnisse sind Vielfache von 3. Das kleinste Ergebnis ist 9, danach werden die Ergebnisse immer um 3 größer. Alle Vielfachen von 3 zwischen 100 und 200 können darum Ergebnisse sein: 102, 105, 108, 111, ..., 192, 195, 198

2 Muster in Päckchen beschreiben (25 Minuten + 10 Minuten Reflexion)

Inhaltliches Ziel: Rechenvorschrift im Rechenpäckchen erfassen und Muster darin erkennen

Sprachliches Ziel: Rechenvorschrift und entdeckte Muster beschreiben

Umsetzung: a)+b)+c)+d) EA, e)+f) PA; gemeinsam Reflexion mit Fokus auf Forschermittel (Markierung im Rechenpäckchen) und Sprache zum Beschreiben von Entdeckungen

Impuls:
Was bleibt gleich? Was verändert sich?

Impuls:
Markiere zuerst farbig, was dir auffällt. Die Farben helfen dir beim Erklären

Impuls:
Wie hat Kenan seine markierten Zahlen genannt? Warum?

Impuls:
Welche Erklärung beschreibt besonders genau?

Impuls:
Was ist gut? Was fehlt noch?

Impuls:
Welche Satzteile und Ausdrücke sind besonders wichtig, wenn man Muster im Rechenpäckchen beschreiben will?

2 Muster in Päckchen beschreiben

$$0 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 25$$

$$a) \text{ Untersuche dieses Päckchen, in dem jeder Term aus zwei Teil-Termen besteht (z.B. } 1 \cdot 3 \text{ und } 4 \cdot 5). \quad 1 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 23$$

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 21$$

$$3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 19$$

$$4 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 17$$

$$5 \cdot 3 + 0 \cdot 5 = 15$$

Im ersten Teilterm wird die erste Zahl immer um 1 größer. Sie wird immer mal 3 genommen. Im zweiten Teilterm Zahl wird die erste Zahl immer um 1 kleiner und dann immer mal 5 genommen. Die beiden Teilterme werden addiert. Das Ergebnis wird darum immer um 2 kleiner.

c) Kenan hat die interessanten Teile im Päckchen eingekreist, damit er sie besser beschreiben kann.
Ergänze seine Markierungen:
Wie kann er die übrigen Teil-Terme nennen?

	Die erste Malaufgabe	Die zweite Malaufgabe	Das Ergebnis
0	$0 \cdot 3$	$+ 5 \cdot 5$	$= 25$
1	$1 \cdot 3$	$+ 4 \cdot 5$	$= 23$
2	$2 \cdot 3$	$+ 3 \cdot 5$	$= 21$
3	$3 \cdot 3$	$+ 2 \cdot 5$	$= 19$
4	$4 \cdot 3$	$+ 1 \cdot 5$	$= 17$
5	$5 \cdot 3$	$+ 0 \cdot 5$	$= 15$

+ ein 3er
- ein 5er
- 2

(4) Im ersten Teil-Term wächst die erste Zahl, dadurch wird er immer um einen 3er größer. Im zweiten Teil-Term sinkt die erste Zahl, dadurch wird es immer ein 5er weniger. Ein 3er mehr und ein 5er weniger, also zusammen ein 2er weniger.

Mit welcher seiner Ideen kann Kenan das Muster am besten beschreiben? Warum? Kreise die beste Beschreibung ein.

e) Kontrolliert gegenseitig eure Beschreibungen aus b) und ergänzt sie.

Wichtige Satzbausteine:

...wird immer um ... größer / kleiner

... bleibt immer gleich.

Der erste/ zweite Teilterm

Das Ergebnis, die erste/ zweite/ ... Zahl

Wird ver...facht

Immer mal ... genommen

f) Welche Satzbausteine haben Euch beim Beschreiben besonders geholfen? Sammelt sie auf dem Notizzettel.

3 Päckchen mit Punktbildern verbinden (15 Minuten + 10 Minuten Reflexion)

Inhaltliches Ziel: Darstellungsvernetzung von Term; Bild und Sprache

Sprachliches Ziel: Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Darstellungsformen begründen

Umsetzung: PA und gemeinsame Reflexion mit Fokus auf den begründeten Zusammenhang zwischen den Darstellungsformen

Impuls:

Was bedeutet zwei 3er (bzw. drei 5er, fünf 3er etc.)? Wie sehen zwei 3er im Bild aus? Wie kann man zwei 3er als Term beschreiben

Impuls:

Was bedeutet plusrechnen? Was bedeutet plusrechnen im Bild? Wo siehst du $3 \cdot 5$ im Bild? Warum passt das Bild zu $3 \cdot 5$? Wie wäre es, wenn du $4 \cdot$, $6 \cdot$, $11 \cdot 5$ hättest?

3 Päckchen mit Punktbildern verbinden

- a) Welchen Teil der Bilder beschreiben diese Terme und diese Ausdrücke, welche passen nicht? Ordne zu und zeichne den passenden Teil der Bilder in dein Heft.

- b) Erkläre noch einmal in Worten:

- Wie zeigt sich ein Plus in den Bildern?
- Wie zeigt sich ein „ \cdot “ in den Bildern?

Ich erkenne ein Plus in den Bildern daran, dass ich zwei Mengen an Punkten habe, die ich zusammenfasse: orangene Teil UND der blaue Teil

Ich erkenne ein „ \cdot “ daran, dass drei gleichgroße Gruppen einer Menge habe: drei Gruppen und in jeder Gruppe fünf.

4 Muster in Päckchen mit Punktebildern begründen (15 Minuten + 10 Minuten Reflexion)

Inhaltliches Ziel: Zusammenhänge im Muster des Rechenpäckchens verstehen

Sprachliches Ziel: Zusammenhänge im entdeckten Muster konkret begründen

Umsetzung: a)+b)+c)+d) EA, Vergleich von c)+d) PA, e) PA; gemeinsame Reflexion an Term und Bild, Fokus auf die Auswirkung der Veränderung

Impuls:
Beschreibe das erste Bild: Wie viele 3er, wie viele 5er?
Woran erkennst du das? Beschreibe jetzt das zweite Bild?
Was ist anders?

Impuls:
Schau dir nochmal Aufgabe 3a an.
Wo siehst du in den Bildern das Ergebnis? Wo siehst du die Veränderung im Ergebnis?

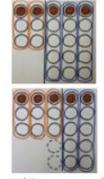
Impuls:
Wie sehen die Bilder für die erste und zweite, zweite und dritte, dritte und vierte Aufgabe aus? Was verändert sich immer?

Impuls:
Was beschreibt Kenan im Bild? Wie verändert sich die dritte Zahl? Wie verändert sich das Bild?

Impuls:
Vergleiche die beiden Bilder in Aufgabe 3a. Was bedeuten die gestichelten Plättchen?

Impuls:
Wie wurde das Muster im Video begründet?
Ergänze in Aufgabe 2 f wichtige Satzbausteine, die du im Video gelernt hast.
Schau dir auch deine Begründung in Aufgabe 4d nochmal an. Kannst du sie mit den neuen Satzbausteinen noch verbessern?

4 Muster in Päckchen mit Punktebildern begründen



a) Vergleiche die Bilder: Wie verändern sich die 3er und 5er vom 1. zum 2. Bild?
Wie wirkt sich das auf das Ergebnis aus?
Im ersten Bild sind es zwei 3er und drei 5er. Im zweiten Bild wird aus einem 5er ein 3er.

b) Kannst du deine Beschreibung aus a) nutzen, um zu begründen, warum sich das Ergebnis der Terme ändert?
 $2 \cdot 3 + 3 \cdot 5$
 $3 \cdot 3 + 2 \cdot 5$
Es wird ein 3er mehr und ein 5er weniger, darum werden es im Ergebnis zwei weniger.

c) Begründe nun, wie sich die Ergebnisse in dem Päckchen verändern, wenn der erste Teil-Term um einen 3er größer wird.
Es kommt immer ein 3er dazu und es wird ein 5er weniger. Darum wird das Ergebnis in jedem Schritt um 2 kleiner.

d) Schreibe Kenans Begründung weiter.
Man rechnet in der ersten Malaufgabe die erste Zahl mal 3. Wenn die erste Zahl um 1 größer wird, dann fügt man einen 3er hinzu.
Man rechnet in der zweiten Malaufgabe die erste Zahl mal 5. Wenn die Zahl ... um eins kleiner wird, dann nimmt man einen 5er weg. Wenn man einen 5er wegnimmt und einen 3er dazutut, dann werden es insgesamt 2 weniger.

e) Erkläre, was Leonie meint.
Wie kannst du ihre Idee für deine Begründung in d) nutzen?
Erklärung z.B. am Bild → einfügen in d)

Ein 3er ist um 2 kleiner als ein 5er. Darum wird das Ergebnis um 2 kleiner.



Leonie

Die erste Malaufgabe

0 · 3	+ 5 · 5	= 25
1 · 3	+ 4 · 5	= 23
2 · 3	+ 3 · 5	= 21
3 · 3	+ 2 · 5	= 19
4 · 3	+ 1 · 5	= 17
5 · 3	+ 0 · 5	= 15

Das Ergebnis

+ ein 3er

- 2

An dieser Stelle kann das Video „Muster in Päckchen erkennen“ gezeigt werden



5 Muster in Päckchen finden und nutzen (30 Minuten + 10 Minuten Reflexion)

Inhaltliches Ziel:	Muster in Rechenpäckchen erkennen/ erfinden, Zusammenhänge dieses Musters verstehen, verallgemeinern und nutzen
Sprachliches Ziel:	Rechenvorschrift und entdeckte Muster beschreiben, Zusammenhänge im Muster konkret begründen, begründet zusammenfassen und die Anwendung der entdeckten Zusammenhänge begründen
Umsetzung:	a)+b)+c)+d) EA, Vergleich von d) in PA, e)+f)+g) PA, gemeinsame Reflexion mit Fokus auf das Nutzen gefundener Muster zur Problemlösung

	5	Muster in Päckchen finden und nutzen	
		Päckchen	Eigenes Päckchen
Impuls: Was bleibt gleich? Was verändert sich?	→	a) Berechnet die Aufgaben im 1. Päckchen und schreibt die nächste Aufgabe dazu.	$3 \cdot 5 - 15 = 0$ $3 \cdot 6 - 15 = 3$
Impuls: Schreibe zuerst eine Aufgabe auf. Welche Zahl soll sich wie verändern?	→	b) Erfinde ein eigenes Päckchen und berechne es.	$3 \cdot 7 - 15 = 6$ $3 \cdot 8 - 15 = 9$
Impuls: Schau dir Aufgabe 2c nochmal an.	→	c) Beschreibt das Muster der beiden Päckchen mit Worten: Wie verändern sich die Zahlen, und was bleibt gleich?	$3 \cdot 9 - 15 = 12$ $3 \cdot 10 - 15 = 15$
			Hier erste Zahl ist immer 3. Sie wird immer mal die zweite Zahl gerechnet. Die zweite Zahl wird immer um 1 größer. Die dritte Zahl ist immer 15 und wird immer abgezogen. Das Ergebnis wird immer um 3 größer. Individuelle Beschreibung für eigenes Kästchen
Impuls: Schau dir zuerst die Ergebnisse der ersten Teilaufgabe an. Warum verändert es sich so?	→	d) Begründet das Muster der beiden Päckchen: Warum ändert sich das Ergebnis so, wie ihr es in c) beschrieben habt?	$3 \cdot 10 - 15 = 15$
			Die zweite Zahl wird immer verdreifacht. Sie wird immer um 1 größer, darum werden es immer 3 mehr. Es wird immer gleichviel abgezogen, darum wird das Ergebnis auch um 3 größer. Individuelle Begründung für eigenes Kästchen
Impuls: Wie sieht das Ergebnis der ersten Aufgabe aus? Um wie viel wird das Ergebnis in jedem Schritt größer? Wie oft ist es bei der 11. Aufgabe bereits größer geworden?	→	e) Wie würde das Ergebnis der 11. Aufgabe in den zwei Päckchen lauten? Erklärt euch gegenseitig, wie ihr vorgegangen seid, um das Ergebnis zu bestimmen.	$3 \cdot 11 - 15 = 18$
			Das erste Ergebnis ist 0, dann wird es immer um 3 größer. In der 11. Aufgabe ist schon zehnmal um 3 größer geworden. Darum ist das Ergebnis dann 30. Individuell für eigenes Kästchen
Impuls: Wie sieht das Ergebnis der ersten Aufgabe aus? Um wie viel wird das Ergebnis in jedem Schritt größer? Wie oft ist es bei der 101. Aufgabe bereits größer geworden?	→	f) Wie würde das Ergebnis der 101. Aufgabe lauten? Begründet, dass ihr tatsächlich die 101. Aufgabe berechnet habt und keine andere. Beschreibt danach auch, wie ihr das Ergebnis einer noch höheren oder x-beliebigen Aufgabe bestimmen könnt.	$3 \cdot 101 - 15 = 297$
			Das erste Ergebnis ist 0, dann wird es immer um 3 größer. In der 101. Aufgabe ist schon hundertmal um 3 größer geworden. Darum ist das Ergebnis dann 300. Individuell für eigenes Kästchen Für eine x-beliebige Aufgabe ist das Ergebnis einmal weniger als x-beliebig-mal um 3 größer geworden. Darum kann man die x-beliebige Zahl minus 1 rechnen und das Ergebnis dann mal 3 nehmen. Individuell für eigenes Kästchen.
Impuls: Wie verändert sich das Ergebnis? Wie würde es sich weiterverändern? Können 7 und 64 so getroffen werden? Welche Zahlen kann man treffen?	→	g)* Können 7 oder 64 Ergebnisse des ersten Päckchens sein? Begründet eure Antwort. Findet danach auch eine Zahl zwischen 100 und 200, die ein Ergebnis aus dem ersten Päckchen ist. Warum ist sie ein Ergebnis aus dem Päckchen? Begründet eure Antwort.	$3 \cdot 100 - 15 = 285$
			Das erste Ergebnis ist 0 und dann werden die Ergebnisse immer um 3 größer, darum sind alle Ergebnisse Vielfache von 3. 7 und 64 sind keine Vielfachen von 3, darum sind sie als Ergebnis nicht möglich. Alle Vielfachen von 3 zwischen 100 und 200 können Ergebnisse sein: 102, 105, 108, 111, ..., 192, 195, 198.

B Zaubertricks durchschauen und begründen

6 Der Hände Trick (15 Minuten + 10 Minuten Reflexion)

Inhaltliches Lernziel: (Un-)systematisches Ausprobieren des Zaubertricks und Erkennen des Musters

Sprachliches Lernziel: Rechenvorschrift beschreiben

Umsetzung: PA; gemeinsame Reflexion mit Fokus auf die systematische Ordnung und das gefundene Muster

Impuls:
Was sagt ihr zu diesem Zaubertrick?
Kann die Zauberin tatsächlich „zaubern“?
Wie könnte dieser Trick funktionieren?
Wie können wir herausfinden, wie er funktioniert?

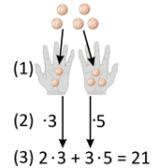
Als Einstieg in die Aufgaben zum Zaubertrick kann als Impuls und erster Gesprächsanlass das Video „der Münztrick“ gezeigt werden. Alternativ kann auch die Lehrkraft den Zaubertrick in der Klasse durchführen.



6 Der Hände-Trick

Mit 5 Münzen macht die Zauberin mit Dir einen Trick:

- (1) Nimm einen Teil der 5 Münzen in die linke Hand und den Rest in die rechte Hand. Verrate die Münzzahlen nicht.
- (2) Multipliziere die Münzzahl in der linken Hand mit 3 und die Münzzahl in der rechten Hand mit 5. Addiere die Punktzahlen und sage der Zauberin die Summe.
- (3) Die Zauberin kann dir durch ihren Zauber sagen, wie viele Münzen du in der linken Hand hattest.



Impuls:
Könnt ihr eure Terme ordnen? Warum ordnet ihr so?
Könnt ihr mit eurer Ordnung erklären, warum ich alle Terme gefunden habt?

- a) Spielt den Trick mehrfach durch. Probiert möglichst viele Möglichkeiten aus und schreibt die Terme auf (nicht nur die Ergebnisse). Begründet, dass ihr alle Möglichkeiten gefunden habt.
Begründung über systematisches Ordnen bzw. systematische Vorgehensweise

Impuls:
Was bleibt gleich? Was verändert sich? Wie sieht die Veränderung aus?

- b) Ordnet eure Terme und schreibt sie untereinander auf. Findet ihr ein Muster in eurem Päckchen? Markiert eure Entdeckungen farbig.

0 · 3 + 5 · 5 = 25
1 · 3 + 4 · 5 = 23
2 · 3 + 3 · 5 = 21
3 · 3 + 2 · 5 = 19
4 · 3 + 1 · 5 = 17
5 · 3 + 0 · 5 = 15

Siehe Markierung aus Aufgabe 2c.

Impuls:
Nutzt die Satzbausteine auf Aufgabe 2f

- c) Beschreibt das Muster mit Worten. Wie verändern sich die Teilterme? Was bleibt gleich?

Im ersten Teilterm wird die erste Zahl in jedem Schritt um 1 größer und dann immer mal 3 gerechnet. Im zweiten Teilterm wird die erste Zahl immer um 1 kleiner und dann immer mal 5 gerechnet. Das Ergebnis wird immer um 2 kleiner.

Impuls:
Wie wurde der Münztrick im Video erklärt?
Habt ihr alle Lösungen gefunden?
Prüft eure Beschreibung aus Aufgabe 6 c?
Könnt ihr das Muster in den Teiltermen jetzt noch besser beschreiben?

Nach dieser Aufgaben, d.h. nach der eigenen Beschäftigung mit dem Problem kann zur Sicherung das Video „Der Münztrick – Erklärung“ gezeigt werden



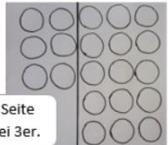
7 Händetrick genauer analysieren und begründen (15 Minuten + 5 Minuten Reflexion)

- Inhaltliches Ziel:** Darstellungsvernetzung von Term, Bild und Sprache, Zusammenhänge im Muster des Zaubertricks Erkennen und Verstehen
- Sprachliches Ziel:** Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Darstellungsformen begründen, entdeckte Muster beschreiben und Zusammenhänge im Muster begründen
- Umsetzung:** PA, gemeinsame Reflexion mit Fokus auf die Vernetzung von Veränderung im Bild, Term und Sprache

Impuls:
Was bedeutet zwei 3er? Wo seht ihr das im Bild? Wo seht ihr das im Term?

7 Händetrick genauer analysieren und begründen

a) Leonie hat ein Bild zum Term $2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 21$ angefangen.



Leonie: Auf der linken Seite sehe ich die zwei 3er.

- Was meint Leonie? Kreise die zwei 3er in ihrem Bild ein.
- Wo sieht man die drei 5er? Wie sieht man das Ergebnis? Erkläre.

Siehe Einzeichnung in Aufgabe 3a)
Links sieht man zwei 3er. Rechts sieht man drei 5er. Die 3er und die 5er bilden zusammen das Ergebnis.

Impuls:
Wie viele 3er müssen im nächsten Bild gemalt werden?
Wie viele 5er müssen gemalt werden?

b) Im nächsten Term wird die erste Zahl um 1 größer und die dritte Zahl um 1 kleiner. Wie verändert sich dann das Ergebnis? Zeichne ein zweites Bild.

Siehe Bilder in Aufgabe 4a

Impuls:
Was verändert sich vom ersten zum zweiten Bild?
Kreist die Veränderung ein.

c) Warum verändert sich das Ergebnis so? Erkläre mit Hilfe der Bilder.

d) Schreibe für deine Freundin oder deinen Freund eine Begründung auf. Wie verändern sich die Teilterme in dem Päckchen? Warum?

In jedem Schritt wird die erste Zahl im ersten Teilterm um 1 größer und die erste Zahl im zweiten Teilterm um 1 kleiner. Darum wird es in jedem Schritt ein 3er mehr und ein 5er weniger. Ein 3er ist um 2 kleiner als ein 5er, darum wird das Ergebnis um 2 kleiner.

Impuls:
Was passiert im Term? Was passiert dabei im Bild?
Da Bild hilft euch beim Erklären.

e) Welche Satzbausteine haben Euch beim Begründen besonders geholfen? Sammelt sie auf dem Notizzettel.

Wichtige Satzbausteine:
Um ... kleiner/ größer.
Drei 5er / zwei 3er etc.
Darum... ; ...weil...
Usw.

8 Zaubertrick verändern und untersuchen (20 Minuten)

Inhaltliches Ziel: Einflussfaktoren im entdeckten Muster (systematisch) variieren und die Wirkung untersuchen, dabei die Zusammenhänge zwischen den Veränderungen und ihren Auswirkungen verstehen

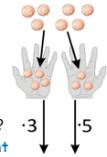
Sprachliches Ziel: Veränderungen bestimmter Aspekte im Muster und der Wirkung beschreiben und verallgemeinern und allgemeine Zusammenhänge im entdeckten Muster begründen

Umsetzung: Als Differenzierung für starke SuS in PA

Impuls:

Vergleicht euer neues Päckchen mit dem Päckchen aus Aufgabe 6. Was ist gleich was ist anders?

8* Zaubertrick verändern und untersuchen



a) Verändere die Regeln des Zaubertricks: Nutze 7 statt 5 Münzen.

- Führe den Trick mit 7 statt 5 Münzen durch.
 - Wie sieht dann das passende Päckchen aus?
 - Wie verändern sich die Zahlen, wie das Ergebnis? Was bleibt gleich?
- Man kann so mehr Aufgaben erstellen. Das kleinste Ergebnis ist nicht mehr $15 (5 \cdot 3 + 0 \cdot 5)$, sondern $21 (7 \cdot 3 + 0 \cdot 5)$. Das größte Ergebnis ist nicht mehr $25 (0 \cdot 3 + 5 \cdot 5)$, sondern $35 (0 \cdot 3 + 7 \cdot 5)$

Impuls:

Wie hat sich das Päckchen verändert, wenn man 7 statt 5 Münzen nimmt? Wie würde diese Veränderung weitergehen?

b) Wie wäre es bei 10 Münzen? Und wie bei 20?

- Wie wäre es bei einer x-beliebigen Anzahl von Münzen?
 Bei 10 Münzen ist das kleinste Ergebnis $30 (10 \cdot 3)$ und das größte Ergebnis $50 (10 \cdot 5)$
 Bei 20 Münzen ist das kleinste Ergebnis $60 (20 \cdot 3)$ und das größte Ergebnis $100 (20 \cdot 5)$
 Bei x-beliebig vielen Münzen ist das kleinste Ergebnis die x-beliebige Zahl $\cdot 3$ und das größte Ergebnis die x-beliebige Zahl $\cdot 5$

Impuls:

Was ist immer da kleinste Ergebnis? Was ist immer das größte Ergebnis?

c) Was hast du entdeckt?

- Das kleinste Ergebnis ist immer die Anzahl aller Münzen $\cdot 3$ (alle Münzen in der linken Hand).
 Das größte Ergebnis ist immer die Anzahl aller Münzen $\cdot 5$ (alle Münzen in der rechten Hand).

Impuls:

Wie sieht das Päckchen aus? Was sind die Ergebnisse? Wie sieht das Bild jetzt aus? Was verändert sich im Bild nun bei jeder Aufgabe?

d) Wie musst du den Zaubertrick verändern, wenn die zweite Zahl im Päckchen immer 4 sein soll?

- Wie lautet jetzt die Regel des Zaubertricks?
- Wie verändert sich das Muster? Warum?
- Wie wäre es, wenn die Münzzahlen mit 2 und 5 multipliziert werden? Und mit 3 und 6?



- Die Münzzahl in der linken Hand muss dann mal 4 genommen werden.
 Statt 3er hat man dann immer 4er. Ein 4er ist um 1 kleiner als ein 5er, darum würde das Ergebnis immer um 1 kleiner werden.
 Wenn die Münzzahl immer mit 2 und 5 multipliziert wird, wären im Bild 2er und 5er. Ein 2er ist um 3 kleiner als ein 5er, darum wird das Ergebnis um 3 kleiner.
 Wenn die Münzzahl mit 3 und 6 multipliziert wird, wären im Bild 3er und 6er. Ein 3er ist um 3 kleiner als ein 6er, darum wird das Ergebnis um 3 kleiner.

Impuls:

Wie kann man die Veränderung im Ergebnis im Bild/ in der Aufgabe immer erkennen?

e) Was hast du entdeckt? Erkläre deine Entdeckungen.

- Der Unterschied zwischen den beiden Zahlen mit denen die Münzzahlen multipliziert werden, gibt den Unterschied zwischen den Gruppengrößen im Bild an. Darum gibt der Unterschied zwischen den beiden Zahlen an, wie sich das Ergebnis im Päckchen verändert.

Speicherkiste: Muster in Kästchen beschreiben und in Bildern begründen

Inhaltliches Ziel: Inhaltliche Sicherung

Sprachliches Ziel: Sprachliche Sicherung

Umsetzung: In Anschluss an die entsprechenden Aufgaben zur Nutzung im weiteren Unterricht oder als Zusammenfassung am Ende der Reihe

Impuls:
Schau dir Aufgabe 2 nochmal an.

Speicherkiste:
Muster in Päckchen beschreiben und in Bildern begründen

So markiert man die Zahlen im Päckchen

Um Muster zu finden, kann man die Teile und Teilterme einkreisen, die sich verändern oder gleichbleiben:

$0 \cdot 3$	+	$5 \cdot 5$	=	25
$1 \cdot 3$	+	$4 \cdot 5$	=	23
$2 \cdot 3$	+	$3 \cdot 5$	=	21
$3 \cdot 3$	+	$2 \cdot 5$	=	19
$4 \cdot 3$	+	$1 \cdot 5$	=	17
$5 \cdot 3$	+	$0 \cdot 5$	=	15

Die erste Malaufgabe
+ ein 3er
Das Ergebnis
- 2

Tipp: Aufgabe 2 hilft

Impuls:
Schau dir Aufgabe 2 nochmal an.

So beschreibt man die Muster im Päckchen

Der erste Teilterm ... wird immer um einen 3er größer

Der zweite Teilterm ... wird immer um einen 5er kleiner

Das Ergebnis ... wird immer um 2 kleiner

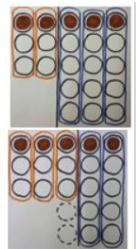
Tipp: Aufgabe 3 hilft

Impuls:
Schau dir Aufgabe 3 nochmal an.

So verbindet man die Päckchen mit Punktebildern

Zum ersten Bild passt der Term $\underline{2} \cdot 3 + 3 \cdot 5$,
denn ich sehe $\underline{2}$ 3er und $\underline{3}$ 5er.

Zum zweiten Bild passt der Term $\underline{3} \cdot 3 + 2 \cdot 5$,
denn ich sehe $\underline{3}$ 3er und $\underline{2}$ 5er.



Tipp: Aufgabe 4 hilft

Impuls:
Schau dir Aufgabe 4 nochmal an.

So begründet man das Muster in dem Päckchen im Punktebild

Man rechnet in der ersten Malaufgabe die erste Zahl mal 3.
Wenn die erste Zahl im Teil-Term um 1 größer wird, dann fügt man einen 3er hinzu.
Man rechnet in der zweiten Malaufgabe die erste Zahl mal 5. Wenn die Zahl ...
Im zweiten Teilterm um 1 kleiner wird, dann nimmt man einen 5er weg. Ein 3er ist um 2 kleiner als ein 5er. Darum wird das Ergebnis um 2 kleiner.